



ANA SOFIA LOUREIRO DA COSTA **MÉTODO DAS FORÇAS PARA A DETERMINAÇÃO
NUMÉRICA DOS FACTORES DE INTENSIDADE DE
TENSÃO**



ANA SOFIA LOUREIRO DA COSTA **MÉTODO DAS FORÇAS PARA A DETERMINAÇÃO
NUMÉRICA DOS FACTORES DE INTENSIDADE DE
TENSÃO**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor Rui Pedro Ramos Cardoso, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho à minha família.

o júri

presidente

Prof. Doutor Francisco José Malheiro Queirós de Melo
Professor Associado do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Renato Manuel Natal Jorge
Professor Auxiliar da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Prof. Doutor Rui Pedro Ramos Cardoso
Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro

Agradecimentos

Os meus agradecimentos ao Professor Rui Pedro Ramos Cardoso por todo o seu apoio, pela sua disponibilidade, pelo seu incentivo e orientação.

Ao Professor José Grácio, agradeço a oportunidade e o incentivo para realizar este Mestrado.

Ao Professor Alfredo de Moraes, por ter disponibilizado o seu trabalho.

Agradeço às minhas colegas Sara Vicente e Raquel Vaz.

Aos meus pais, pelo seu apoio.

À minha família.

palavras-chave

Mecânica da Fractura Linear Elástica, Propagação Arbitrária de Fendas, Factores de Intensidade de Tensão, Método das Forças.

resumo

Este trabalho apresenta um modelo numérico que permite a obtenção dos Factores de Intensidade de Tensão, para os modos I e II da Mecânica da Fractura Linear Elástica. É feita uma adaptação ao Método das Forças de De Morais, de forma a ser possível o estudo do comportamento de elementos estruturais com fendas, para qualquer malha quadrangular de elementos finitos. Desta forma, é possível prever a propagação arbitrária de fendas e aferir acerca da integridade dos elementos estruturais em análises lineares elásticas e de fadiga.

O algoritmo transforma os elementos quadrangulares em elementos triangulares, permitindo assim a determinação das forças nodais para os nós dos elementos finitos que se encontram situados no eixo local da ponta da fenda. As forças ao longo do eixo local resultam do agrupamento das forças internas nodais dos novos elementos triangulares criados. Este método é geral e válido para malhas distorcidas, sendo assim apropriado para algoritmos de propagação arbitrária de fendas.

keywords

Linear Elastic Fracture Mechanics, Arbitrary Crack Propagation, Stress Intensity Factors, Force Method.

abstract

This work presents a numeric model to obtain the Stress Intensity Factors for modes I and II of Fracture Mechanics. An adaptation is done to the Force Method of De Morais, to study the behaviour of structural elements with cracked finite elements meshes. In this way, it is possible to predict arbitrary crack propagation and thus to check the integrity of structural members in linear elastic fatigue analyses.

The algorithm splits the quadrilateral elements in triangular elements, allowing the evaluation of nodal forces along the local x-axis. Forces along x-ligaments result automatically from assembling the internal nodal forces of the newly created triangles. The proposed method is general and valid for distorted meshes and is thus appropriate for general arbitrary crack path propagation algorithms.

Conteúdo

1 Introdução	1
1.1 Estado da Arte	3
1.2 Objectivos e Apresentação da tese	6
2 Mecânica da Fractura Linear Elástica	9
2.1 Introdução	11
2.2 Factor de Intensidade de Tensão	12
2.3 Função de Tensão de Airy	15
2.4 Funções de Tensão Complexas.....	16
2.5 Tensões na ponta da fenda.....	18
2.6 Critério de Griffith.....	21
2.7 Método G – Taxa de Libertação de Energia.....	24
2.8 Relação entre K e G.....	27
2.9 Método do Integral J.....	29
2.10 XFEM - Método dos Elementos Finitos Estendido.....	32
2.10.1 Construção da aproximação de elementos finitos com descontinuidades...	33
2.11 Elementos Finitos Singulares	36
2.11.1 Elementos “Quarter-points” a uma dimensão	38
2.11.2 Cálculo Numérico dos Factores de Intensidade de Tensão	40
2.11.2.1 Método de Correlação dos Deslocamentos	40
3 Método das Forças.....	43
3.1 Introdução	45
3.2 Método de De Morais	46
3.3 Novo Método Proposto.....	49
3.3.1 Algoritmo	50
3.3.2 Elemento Quadrangular para Estado Plano de tensão	54
3.3.2.1 Cinemática	54
3.3.3 Elemento Triangular para Estado Plano de tensão	59
4 Resultados	65
4.1 Placa rectangular com fenda central	69
4.1.1 Análise de K_I para $\frac{1}{4}$ da placa (malha regular)	69
4.1.2 Análise de K_I para $\frac{1}{2}$ da placa (malha regular)	73
4.1.3 Análise de K_I para $\frac{1}{2}$ da placa (malha irregular)	76

4.1.4 Análise de K_{II} (malha regular)	79
4.1.5 Análise de K_{II} (malha irregular)	82
5 Conclusões	85
Bibliografia.....	89

Lista de Figuras

1.1 Exemplos da importância da Mecânica da Fractura	4
2.1 Materiais Dúcteis (grande deformação plástica) e Materiais Frágeis (pouca deformação plástica).....	12
2.2 Corpo com uma fenda de tamanho $2a$ e sujeito uma tensão nominal σ	13
2.3 Modos de fractura básicos numa fenda.	13
2.4 Sistema de eixos na ponta da fenda, numa placa sujeita a uma tensão nominal σ_R . 14	
2.5 (a) Placa com fenda sujeita a carregamento; (b) Distribuição das tensões na vizinhança da ponta da fenda.....	19
2.6 Placa de dimensão infinita, com uma fenda de tamanho a	22
2.7 Placa com fenda, sujeita a um carregamento P	25
2.8 Ponta da fenda.	28
2.9 Sistema de coordenadas para o cálculo do integral J	31
2.10 (a) Domínio com uma fronteira interna Γ_c . (b) Malha que não modela a fronteira interna. (c) Adaptação da malha à geometria de Γ_c . (d) Malha uniforme, onde os nós a negrito têm graus de liberdade adicionais e funções de enriquecimento.	34
2.11 Regiões da fenda para o enriquecimento.....	34
2.12 Sistema de coordenadas locais polar na ponta da fenda.	35
2.12 Elementos singulares quarter-points: (a) quadrilateral; (b) triangular.....	37
2.13 Elemento 1-D quadrático: (a) espaço paramétrico do elemento; (b) espaço cartesiano do elemento.	39
2.14 Elemento “quarter-point” na ponta da fenda.	41
2.15 Localização dos nós para o cálculo dos factores de intensidade de tensão.	41

3.1 Ponta da fenda e sistema local de coordenadas.	45
3.2 Definição da distância x_c para o cálculo das forças, para uma malha com elementos de 4 nós.	47
3.3 Condição de equilíbrio.	48
3.4 Malha de elementos quadrangular arbitrária.	49
3.5 Elementos quadrangulares intersectados pelo eixo x	50
3.6 Nós sobre o eixo x	51
3.7 Nós na parte positiva do eixo y	51
3.8 Divisão em um triângulo.	52
3.9 Divisão em dois triângulos.	52
3.10 Divisão em três triângulos.	52
3.11 Divisão em dois triângulos.	52
3.12 Malha quadrangular dividida em triângulos.	53
3.13 Sistema de coordenadas.	54
3.14 Sistema de coordenadas para o elemento triangular.	60
3.15 Sistema de coordenadas convectivo para o elemento triangular.	61
 4.1 Placa com uma fenda central.	 68
4.2 Condições Fronteira e Deslocamento prescrito, para o exemplo 4.1.1.	69
4.3 Modelo de elementos finitos sob as configurações de deformação, correspondente a $\frac{1}{4}$ da placa.	70
4.4 Pormenor da zona perto da ponta da fenda da malha de elementos finitos.	70
4.5 Estimativa do factor de intensidade de tensão K_I , para a malha 0.05 mm.	71
4.6 Estimativa do factor de intensidade de tensão K_I , para a malha 0.2 mm.	72
4.7 Condições Fronteira e Deslocamento, prescrito para o exemplo 4.1.2.	73
4.8 Malha de elementos finitos, correspondente a $\frac{1}{2}$ do modelo total da placa.	74
4.9 Zoom pormenorizado da zona perto da ponta da fenda, para o caso de comprimentos dos elementos 0.05 mm.	74
4.10 Zoom pormenorizado da zona perto da ponta da fenda, para o caso de comprimentos dos elementos 0.1 mm.	75
4.11 Estimativa do factor de intensidade de tensão K_I , para a malha 0.05 mm.	75
4.12 Estimativa do factor de intensidade de tensão K_I , para a malha 0.1 mm.	76
4.13 Malha de elementos finitos não estruturada, correspondente a $\frac{1}{2}$ do modelo total da placa.	77

4.14 Zoom pormenorizado da zona perto da ponta da fenda, para o caso de comprimentos dos elementos 0.05 mm.	77
4.15 Zoom pormenorizado da zona perto da ponta da fenda, para o caso de comprimentos dos elementos 0.08 mm.	78
4.16 Estimativa do factor de intensidade de tensão K_I , para a malha 0.05 mm.	78
4.17 Estimativa do factor de intensidade de tensão K_I , para a malha 0.08 mm.	79
4.18 Malha de elementos finitos, para o cálculo de K_{II}	80
4.19 Zoom pormenorizado da zona perto da ponta da fenda.	80
4.20 Condições Fronteira e Deslocamento prescrito, para o exemplo 4.1.4 do cálculo de K_{II}	81
4.21 Estimativa do factor de intensidade de tensão K_{II} , para o exemplo 4.1.4.	82
4.22 Malha de elementos finitos, para o cálculo de K_{II}	83
4.23 Zoom pormenorizado da zona perto da ponta da fenda, para o exemplo 4.1.5 do cálculo de K_{II}	83
4.24 Estimativa do factor de intensidade de tensão K_{II} , para o exemplo 4.1.5.	84

Capítulo 1

Introdução

1 Introdução

1.1 Estado da Arte

A investigação à volta do desenvolvimento de novos materiais tem aumentado em larga escala ao longo das últimas décadas. Em particular, o uso de materiais metálicos tem vindo a acentuar-se, o que também tem implicado um crescente aumento dos problemas estruturais que necessitam de ser resolvidos. Grande parte de problemas estruturais estão relacionados com o aparecimento de fendas e também à sua consequente propagação.

A mecânica da fractura é actualmente uma área do conhecimento em franca expansão. De facto, os problemas que se colocam actualmente na área das estruturas são de enorme complexidade, sobretudo se tivermos em consideração a vasta aplicação de novos materiais metálicos e compósitos. Também nos sectores de elevado impacto económico como a indústria automóvel, aeroespacial, naval, etc., a ocorrência de fadiga e fractura é equacionada com grande preocupação a fim de evitar falhas de desempenho que, eventualmente, possam conduzir a acidentes graves (Figura 1.1). Assim, justifica-se a crescente preocupação pelo estudo e investigação dos problemas relacionados com a Mecânica da Fractura e mais concretamente com a Mecânica da Fractura Linear Elástica.

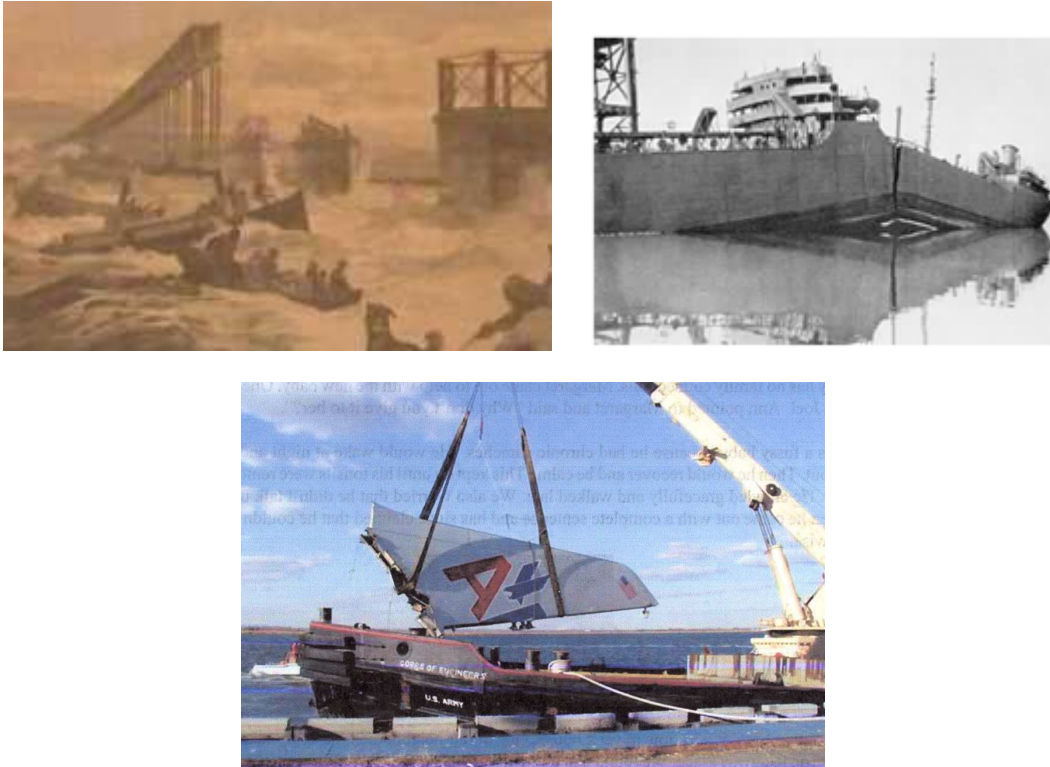


Figura 1.1 – Exemplos da importância da Mecânica da Fractura.

A maior parte das fracturas começam com o aparecimento de pequenas fendas. Estas pequenas fendas são causadas por defeitos do material (como impurezas), por discontinuidades, ambientes ásperos, danos devido ao uso (impacto, fadiga, cargas excessivas) e também devido a condições severas de serviço. O crescimento das fendas depende do nível de tensão, das propriedades do material e também do próprio mecanismo responsável pela incubação da fenda.

Os estudos originais sobre a Mecânica da Fractura devem-se a Alan Arnold Griffith [26][27]. Segundo cálculos realizados, a teoria de Griffith demonstrou que, na ponta da fenda, as tensões apresentam um comportamento assintótico tendendo para o infinito. Ou seja, qualquer estrutura que contivesse uma fenda deveria falhar, independentemente do tamanho da fenda ou do carregamento a que estava sujeita. Para resolver este dilema, Griffith desenvolveu uma aproximação termodinâmica, estabelecendo assim um balanço energético no desenvolvimento e aparecimento de fendas: o crescimento da fenda origina a geração de energia superficial, pela perda da energia de deformação, que acompanha o relaxamento das tensões locais à medida que a fenda avança. O trabalho de Griffith foi no entanto ignorado durante mais de vinte anos.

A teoria de Griffith foi posteriormente reavaliada por George Rankine Irwin em 1957 [33]. Irwin desenvolveu uma extensão da teoria de Griffith e propôs um novo critério para a propagação de fendas: a *Taxa de Libertação de Energia*, G , deve ser maior do que o trabalho crítico (G_c), que é necessário para criar uma nova unidade de fenda [33]. Irwin usou a aproximação de Westergaard [49], que exprime a função de tensão de Airy em termos das funções gerais harmônicas, para demonstrar que as tensões e os deslocamentos na vizinhança da ponta da fenda podem ser determinados por um único parâmetro, que se pode relacionar com a taxa de libertação de energia. Este parâmetro ficou mais tarde conhecido como *Factor de Intensidade de Tensão*. O Factor de Intensidade de Tensão permite assim prever, com bastante precisão, a distribuição de tensões na vizinhança da fenda, na Mecânica da Fractura Linear Elástica.

Porém, quando um material possui uma resistência mecânica mais reduzida e os efeitos da plastificação não podem ser desprezáveis, não é possível aplicar a Mecânica da Fractura Linear Elástica, pois o Factor de Intensidade de Tensão deixa de ser válido nestas condições. Logo, são necessários outros parâmetros que caracterizem o estado de tensão na ponta da fenda.

Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos para a determinação dos factores de intensidade de tensão, para a mecânica da fractura linear elástica. Em 1967, Cherepanov [18], e em 1968, J. R. Rice [42], desenvolveram um novo método para a determinação dos factores de intensidade de tensão, o integral J . O integral J representa também um balanço energético, medido ao longo dum contorno fechado na vizinhança da fenda. O integral J pode também ser usado como critério de propagação da fenda, na medida em que é a quantidade de energia necessária para uma fenda de tamanho inicial a crescer. Conforme se verá no Capítulo 2, a taxa de libertação de energia G e o integral J podem ser relacionados de forma a ser possível determinar os factores de intensidade de tensão para os modos I (modo de abertura) e II (modo de deslize), na mecânica da fractura linear elástica.

A modelação de elementos estruturais com fendas é um assunto de enorme importância nas indústrias tecnológicas de ponta, como por exemplo o caso das indústrias aeronáutica (Figura 1.1) e automóvel. A determinação dos factores de intensidade de tensão permite a aferição da integridade estrutural e previsão do comportamento mecânico dos materiais e consequente propagação ou retenção das fendas. Desta forma, com o crescente uso de técnicas computacionais, como por

exemplo o método dos elementos finitos, têm sido desenvolvidos diversos trabalhos para a determinação dos factores de intensidade de tensão para os modos I e II da mecânica da fractura linear elástica. Exemplos mais representativos desses trabalhos podem ser observados para o método da taxa de libertação de energia G [33][34], para o método do integral J [18][31][42][43], e, mais recentemente, para o método XFEM [7], onde, neste caso, é construído um campo de enriquecimento para o tensor das deformações na vizinhança da ponta da fenda, de modo a reproduzir com mais exactidão o campo assintótico de distribuição de tensões aí existente.

Estes métodos numéricos são revistos sumariamente no Capítulo 2.

1.2 Objectivos e Apresentação da tese

O objectivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um modelo numérico para a obtenção dos factores de intensidade de tensão para os modos I e II de deformação, na mecânica da fractura linear elástica. O Método é baseado no Método das Forças, proposto por A. B. De Moraes [19]. A aplicação do método das forças neste trabalho é estendida a malhas de elementos finitos arbitrárias na sua forma geométrica, permitindo assim o estudo do comportamento mecânico de elementos estruturais em análises lineares elásticas e de fadiga.

No Capítulo 2 apresenta-se a teoria da Mecânica da Fractura Linear Elástica. São apresentados os conceitos mais relevantes, como a definição das tensões na ponta da fenda, para os modos de carregamento I, II e III. São apresentadas também as Funções de Tensão de Airy e as Funções de Tensão Complexas, com o objectivo de deduzir as expressões das tensões para o modo I. São descritos vários métodos para a determinação dos factores de intensidade de tensão: o Critério de Griffith, a Taxa de Libertação de Energia G , o Integral J , o Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM) e os Elementos Singulares, usados no Método de Correlação dos Deslocamentos.

No Capítulo 3 apresenta-se de forma sumária o Método das Forças proposto por De Moraes [19]. Este Método é uma técnica simples e eficaz para obter os factores de intensidade de tensão, para ambos os modos de fractura I, II e modo misto I + II. O

método de De Morais [19], usa a soma das forças internas na vizinhança da fenda, para desta forma calcular os factores de intensidade de tensão. De Morais mostrou que o Método das Forças é capaz de produzir valores muito precisos dos factores de intensidade de tensão, a partir de modelos de elementos finitos construídos com malhas regulares de elementos. Porém, o método tem algumas limitações para malhas gerais arbitrárias. No novo método proposto, é feita uma adaptação ao método de De Morais, de forma a que o método das forças possa ser aplicado em qualquer tipo de malha de elementos finitos e assim, os factores de intensidade de tensão possam ser usados em algoritmos de propagação arbitrária de fendas, como por exemplo o algoritmo proposto por Yoon et al. [50]. O novo método usa elementos quadrangulares com um ponto de integração, para estados planos de tensão. As forças internas, para obter os factores de intensidade de tensão, são obtidas pelo agrupamento das forças internas provenientes da subdivisão dos quadriláteros em triângulos, numa zona contida na vizinhança da ponta da fenda. É feita ainda uma apresentação dos elementos quadrangulares e triangulares usados no algoritmo, para o estado plano de tensão.

No capítulo 4 são apresentados os resultados numéricos da aplicação do novo método. O novo método foi aplicado a uma placa com uma fenda inicial e para o estado plano de tensão. Os resultados teóricos são comparados com os valores de K_I e K_{II} obtidos pelo novo método. Os modelos de elementos finitos foram construídos no programa GID [24] e os algoritmos apresentados neste trabalho foram integrados no programa Cérebro [13], usando elementos com 4 nós de integração reduzida e elementos triangulares de 3 nós para estados planos de tensão. Foram usados vários tipos de refinamento a uma distância de 3mm da ponta da fenda, com malhas estruturadas e não estruturadas, de forma a comparar os resultados para K_I e para K_{II} .

Capítulo 2

Mecânica da Fractura Linear

Elástica

2 Mecânica da Fractura Linear Elástica

2.1 Introdução

Em 1920, Griffith [26][27] estudou o comportamento de materiais metálicos que continham fendas. Segundo Griffith, o aparecimento de uma fenda num componente, sob a acção de um estado de tensão em regime elástico, leva a um balanço energético entre a diminuição da energia potencial (resultante da energia elástica armazenada e do trabalho produzido pelas forças exteriores) e o incremento da energia de superfície resultante da criação das novas superfícies da fenda. Logo, se o sistema fornecer energia de superfície suficiente, a fenda pré-existente crescerá.

Porém, os trabalhos de Griffith foram ignorados durante quase três décadas, embora diversos desastres devidos a problemas relacionados com a mecânica da fractura continuassem a ocorrer. Por exemplo, na década de 50 diversos aviões caíram, durante a 2ª Guerra Mundial ocorreram diversas fracturas em navios, etc. Devido a estas ocorrências e ao crescente avanço tecnológico em diversas áreas, deu-se um crescente interesse pelo fenómeno da mecânica da fractura.

Entre 1945 e 1966, E. Orowan [39][40] e George R. Irwin [33], entre outros, estabeleceram os princípios básicos da *Mecânica da Fractura Linear Elástica*. Irwin sugeriu que o critério de fractura proposto por Griffith para os materiais frágeis poderia ser modificado e aplicado igualmente aos materiais dúcteis (Figura 2.1). Irwin mostrou que o campo de tensões existente na vizinhança da ponta da fenda obedecia a uma determinada distribuição, em função da posição do ponto em questão, expresso em coordenadas polares. A modificação que Orowan propôs foi semelhante [39][40]. Orowan estabeleceu que a resistência de um material à fractura compreendia a soma da

energia elástica de superfície e do trabalho de deformação que acompanha a extensão da fissura.

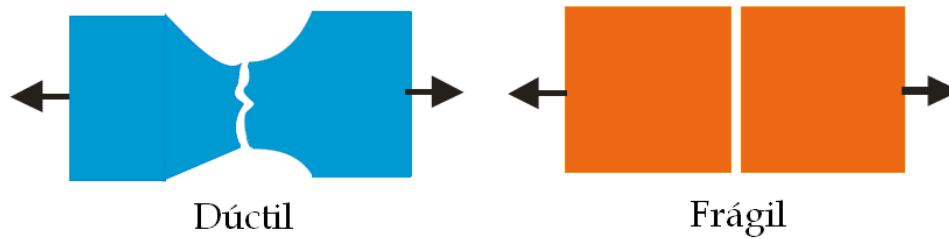


Figura 2.1 – Materiais Dúcteis (grande deformação plástica) e Materiais Frágeis (pouca deformação plástica).

Os critérios de dimensionamento tradicionais supunham que os materiais e componentes não tinham defeitos. A Mecânica da Fractura vem contrapor esta suposição, uma vez que na prática não é admissível que assim o seja. Assim, a Mecânica da Fractura é baseada na análise de tensões para cada componente estrutural, a partir do conhecimento da tenacidade do material, do estado de tensão e da dimensão da fissura.

A Mecânica da Fractura Linear Elástica, desenvolvida por Irwin [33], é baseada num método analítico que relaciona a distribuição do campo de tensões na vizinhança da ponta da fenda com a tensão nominal (afastada da ponta da fenda) aplicada ao componente estrutural, as características geométricas da fenda e as propriedades mecânicas do material.

Nas secções seguintes apresenta-se de forma sumária os conceitos mais importantes da mecânica da fractura linear elástica.

2.2 Factor de Intensidade de Tensão

Considere-se um corpo com uma fenda plana, de tamanho $2a$, sujeito a uma tensão nominal σ , de acordo com a Figura 2.2.

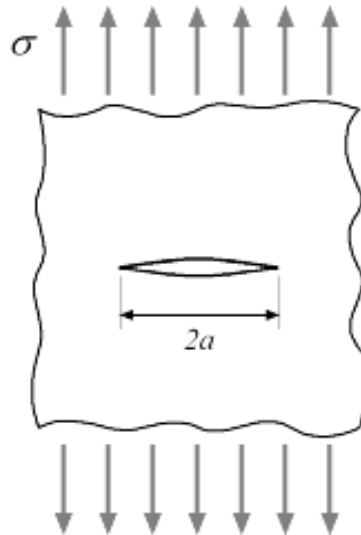


Figura 2.2 – Corpo com uma fenda de tamanho $2a$ e sujeito uma tensão nominal σ .

As distribuições das tensões na ponta da fenda podem ser associadas a três modos principais de fractura, como mostra a Figura 2.3.

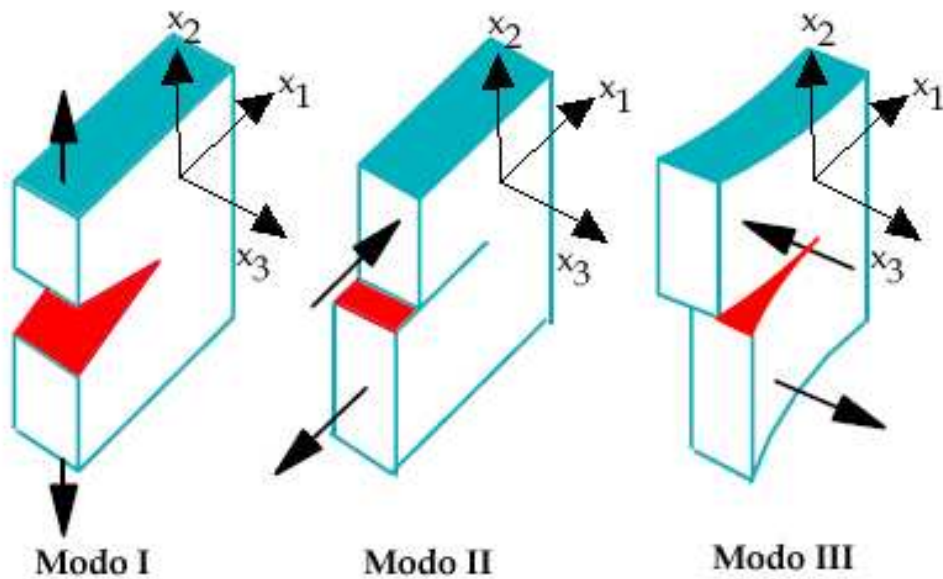


Figura 2.3 – Modos de fractura básicos numa fenda.

O modo I é o modo de abertura, em que as tensões normais dão origem a um deslocamento da superfície da fenda segundo x_2 e perpendicular ao plano da fenda. O modo II é o modo de deslizamento, onde as superfícies da fenda deslizam uma sobre a outra

segundo a direcção de x_1 . Finalmente o modo III é o modo de corte, onde os deslocamentos da superfície da fenda ocorrem segundo a direcção x_3 . Os modos I e II são tecnicamente os mais importantes e que são encontrados na maioria das situações de engenharia envolvendo componentes com fendas. Neste trabalho apenas serão tratados os modos I e II.

Uma fenda actua como um factor de amplificação das tensões nominais impostas pelo carregamento exterior. Assim, na extremidade da fenda as tensões são muito mais elevadas do que no restante corpo. O *Factor de Intensidade da Tensão* – K , permite caracterizar o comportamento mecânico do material e é dado pela expressão seguinte [34]:

$$K_I = \sigma_R (\pi a)^{1/2}, \quad (1)$$

onde a é metade do comprimento da fenda e σ_R é a tensão de referência ou tensão nominal, de acordo com a Figura 2.4.

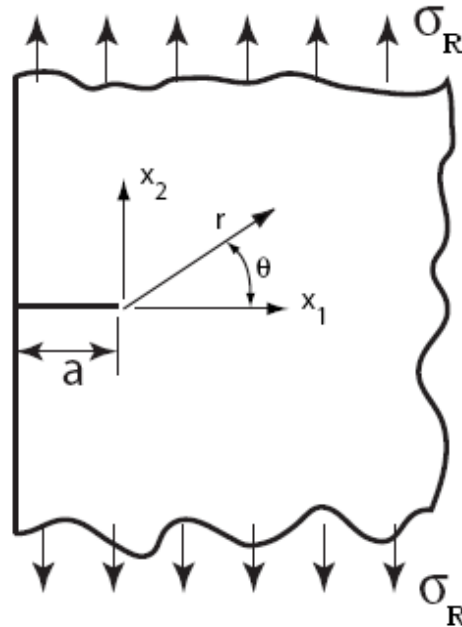


Figura 2.4 – Sistema de eixos na ponta da fenda, numa placa sujeita a uma tensão nominal σ_R .

O valor crítico do factor de intensidade de tensão K é uma propriedade intrínseca do material e denomina-se por *Tenacidade à Fractura* - K_c . Através deste factor é possível determinar se a propagação das fendas ocorrerá de uma forma controlada ou instável.

2.3 Função de Tensão de Airy

Para obter a solução do estado de tensão em problemas de elasticidade, será necessário encontrar uma função matemática para a distribuição das tensões. Para estados planos de tensão ou deformação, o método usual para resolver o conjunto de equações diferenciais (equações de equilíbrio e equações de compatibilidade) é através da introdução da função de tensão de Airy.

Consideremos o sistema de coordenadas X, Y, Z num sólido sujeito a um determinado estado de tensão. Para cada ponto (x, y, z) temos as seguintes componentes Cartesianas da tensão: $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

A solução do problema deverá satisfazer as condições de equilíbrio e de compatibilidade. Assim, no caso de um estado de tensão para problemas planos, uma das equações de compatibilidade é dada por:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

O comportamento linear elástico assume que o estado de deformação é proporcional ao estado de tensão. A Lei de Hooke, que matematicamente exprime esta relação linear, permite, para um estado plano de tensão, exprimir as deformações em relação às tensões, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{E} 2(1 + \nu) \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (3)$$

Substituindo as equações (3) na equação de compatibilidade (2) temos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{E} 2(1 + \nu) \tau_{xy} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] \right) = 0. \quad (4)$$

Simplificando a equação (4), obtemos:

$$2(1+\nu)\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\nu\partial^2\sigma_{yy} - \partial^2\sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\nu\partial^2\sigma_{xx} - \partial^2\sigma_{yy}}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Podemos recorrer a uma função de tensão de Airy, designada por Ψ e definir as componentes Cartesianas da tensão, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Substituindo as equações (6) na equação (5), obtém-se:

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} = 0. \quad (7)$$

Esta equação é também conhecida matematicamente como a equação bi-harmónica e pode ser escrita de uma forma compacta como:

$$\nabla^2(\nabla^2\psi) = 0, \quad (8)$$

onde ∇^2 é o operador de Laplace.

De seguida aplica-se a função de tensão de Airy para se obter a distribuição das tensões na vizinhança da ponta da fenda.

2.4 Funções de Tensão Complexas

Da secção anterior, obtivemos a equação diferencial bi-harmónica a partir da equação de compatibilidade. A forma exacta da solução da equação (8) deverá também satisfazer simultaneamente a equação bi-harmónica e as condições fronteira do problema.

Segundo Dettman [20], fazendo $z = x + iy$, qualquer função de variável complexa pode ser expressa da seguinte forma:

$$Z(z) = \text{Re } Z + i \text{Im } Z . \quad (9)$$

Logo,

$$Z_1'(z) = \frac{\partial \text{Re } Z}{\partial x} + i \frac{\partial \text{Im } Z}{\partial x} , \quad (10)$$

e

$$Z_2'(z) = -i \frac{\partial \text{Re } Z}{\partial y} + \frac{\partial \text{Im } Z}{\partial y} . \quad (11)$$

Mas, para Z ser uma função analítica, deverá existir a derivada dZ/dz e ser única, ou seja:

$$Z_1'(z) = Z_2'(z) . \quad (12)$$

Assim, a partir da equação (12), obtêm-se as seguintes condições de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Re } Z}{\partial x} &= \frac{\partial \text{Im } Z}{\partial y} = \text{Re } \frac{\partial Z}{\partial z}; \\ \frac{\partial \text{Im } Z}{\partial x} &= -\frac{\partial \text{Re } Z}{\partial y} = \text{Im } \frac{\partial Z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (13)$$

Em 1939, Westergaard [49] propôs uma função de tensão complexa para problemas de fractura para o Modo I de deformação. Segundo Westergaard, ψ é uma função hierárquica com a seguinte forma:

$$\psi = \text{Re } \bar{\bar{Z}} + y \text{Im } \bar{Z} , \quad (14)$$

onde as seguintes relações são válidas:

$$\frac{d\bar{\bar{Z}}}{dz} = \bar{Z}, \quad \frac{d\bar{Z}}{dz} = Z, \quad \frac{dZ}{dz} = Z' . \quad (15)$$

A partir das expressões das tensões (6), aplicam-se as condições de Cauchy-Riemann (13), juntamente com as relações (15), chegando-se aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\text{Re } \bar{Z} + y \text{Im } \bar{Z} \right) \right) \\
 &= \text{Re } Z - y \text{Im } Z' \\
 \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\text{Re } \bar{Z} + y \text{Im } \bar{Z} \right) \right) \\
 &= \text{Re } Z + y \text{Im } Z' \\
 \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\text{Re } \bar{Z} + y \text{Im } \bar{Z} \right) \right) \\
 &= -y \text{Re } Z'
 \end{aligned} \tag{16}$$

Na secção seguinte serão obtidas as expressões das tensões em função do factor de intensidade de tensão.

2.5 Tensões na ponta da fenda

Westergaard [49] estudou o problema de uma placa de tamanho e forma arbitrárias, submetida a um carregamento arbitrário do modo I e que contém uma fenda de tamanho $2a$, como mostra a Figura 2.5. Neste caso a solução do problema é definida da seguinte forma [49]:

$$Z = \frac{z\sigma}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \tag{17}$$

Fazendo a derivada da expressão (17) em ordem a z , vem que:

$$Z'(z) = \frac{-a^2\sigma}{(z^2 - a^2)^{3/2}}. \tag{18}$$

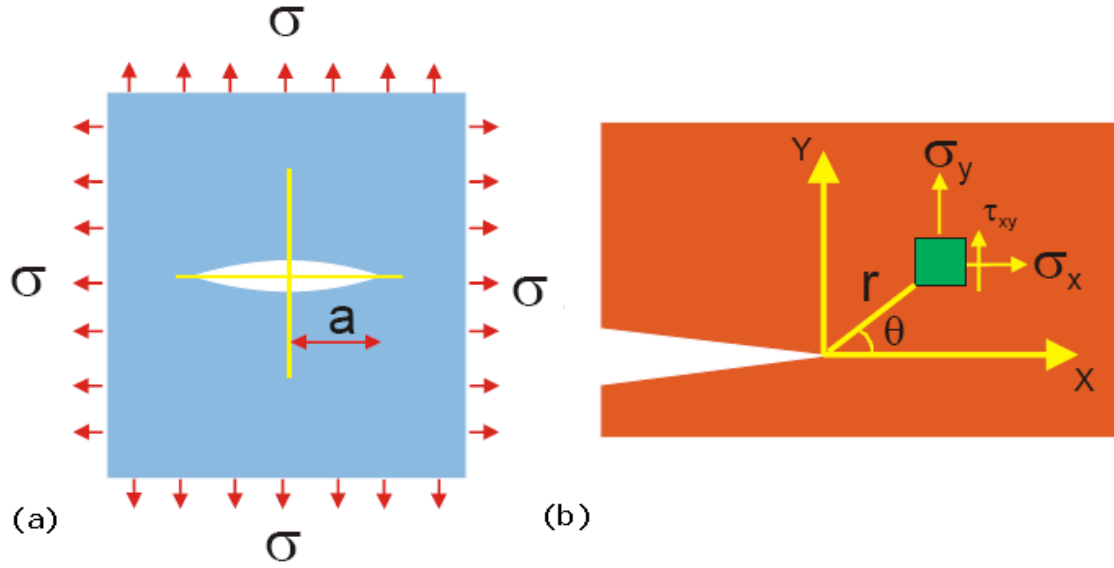


Figura 2.5 – (a) Placa com fenda sujeita a carregamento; (b) Distribuição das tensões na vizinhança da ponta da fenda.

Substituindo as expressões (17) e (18) nas equações (16):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \text{Re } Z - y \text{Im } Z' = \text{Re} \left[\frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right] - y \text{Im} \left[\frac{-a^2 z}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \\
 \sigma_{yy} &= \text{Re } Z + y \text{Im } Z' = \text{Re} \left[\frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right] + y \text{Im} \left[\frac{-a^2 z}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \\
 \tau_{xy} &= -y \text{Re } Z' = -y \text{Re} \left[\frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right]
 \end{aligned} \tag{19}$$

Aplicando as condições fronteira, temos que:

- no infinito ($|z| \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \sigma \\
 \sigma_{yy} &= \sigma \\
 \tau_{xy} &= 0
 \end{aligned} \tag{20}$$

- na superfície da fenda ($-a < x < a$; $y = 0$)

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \operatorname{Re} \left[\frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{\sigma(x + i0^+)}{i\sqrt{x^2 - a^2}} \right] = 0 \\ \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} \left[\frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{\sigma(x + i0^+)}{i\sqrt{x^2 - a^2}} \right] = 0. \\ \tau_{xy} &= 0\end{aligned}\tag{21}$$

Substituindo z por $z' + a$, faz-se uma translação do sistema de coordenadas da origem para a ponta da fenda (Figura 2.5b). Logo, a partir da equação (17) temos:

$$Z = \frac{\sigma(z' + a)}{\sqrt{(z' + a)^2 - a^2}} = \frac{\sigma(z' + a)}{\sqrt{z'(z' + 2a)}},\tag{22}$$

e na vizinhança da ponta da fenda, isto é, $|z'| \rightarrow 0$:

$$Z = \frac{\sigma a}{\sqrt{2az'}}.\tag{23}$$

Usando a equação (1) vem:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \Leftrightarrow \sigma = \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}}.\tag{24}$$

Substituindo a expressão (24) na (23):

$$Z = \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \frac{a}{\sqrt{2az'}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi z'}}.\tag{25}$$

A partir das coordenadas polares podemos obter as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}z &= re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ z^{-1/2} &= r^{-1/2} e^{-1/2i\theta} = r^{-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ z^{-3/2} &= r^{-3/2} e^{-3/2i\theta} = r^{-3/2} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ y &= r \sin \theta = 2r \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}.\end{aligned}\tag{26}$$

Logo, na vizinhança da ponta da fenda e a partir da equação (25) temos que:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi z'}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ Z' &= -\frac{1}{2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r^{3/2}}} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Assim, substituindo nas expressões das tensões (16), obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \text{Re } Z + y \text{Im } Z' \\ &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_x &= \text{Re } Z - y \text{Im } Z' \\ &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - 2r \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r^{3/2}}} \sin \frac{3\theta}{2} \\ &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= -y \text{Re } Z' \\ &= -2r \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left(-\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi r^{3/2}}} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Ou, numa forma mais geral:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta). \quad (29)$$

Equações similares podem ser deduzidas para K_{II} e K_{III} [10].

2.6 Critério de Griffith

Consideremos uma placa de dimensão teoricamente infinita, com espessura t e com uma fenda central transversa de comprimento $2a$. A placa é submetida a uma tensão nominal σ , aplicada no “infinito”, como se pode observar na Figura 2.6.

Griffith [26][27], verificou que quando uma fenda é introduzida numa placa com material em regime elástico, é necessário efectuar um balanço entre a energia potencial

(relacionada com a libertação de energia elástica armazenada e com o trabalho realizado pelas forças externas) e o aumento da energia de superfície resultante da presença da fenda.

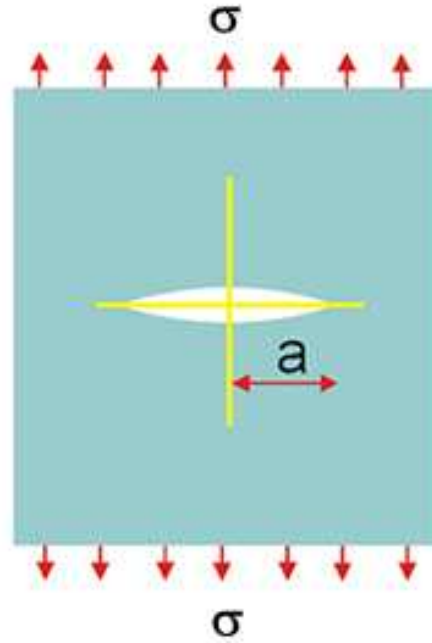


Figura 2.6 – Placa de dimensão infinita, com uma fenda de tamanho a .

A energia de deformação do sistema da Figura 2.6, consiste em três partes: a energia potencial elástica da placa sem fenda U_0 , a energia de deformação necessária para introduzir uma fenda U_a e a energia elástica de superfície causada pela formação das superfícies da fenda U_γ .

Griffith [26][27] usou a análise de tensões desenvolvida por Inglis [32], para mostrar que para uma placa de dimensão “infinita”, com uma fenda de forma elíptica, a variação (decréscimo) da energia potencial elástica da placa é dada por:

$$U_a = \frac{\pi \sigma^2 a^2 t}{E}. \quad (30)$$

Griffith assumiu que, para materiais frágeis, a introdução de uma fenda requer uma determinada quantidade de energia de superfície. Esta quantidade é igual ao produto da área total de superfície da fenda, $2a \cdot 2t$, com a energia de superfície específica por unidade de área, denominada por γ_s :

$$U_{\gamma} = 2a \cdot 2t \times \gamma_s = 4at\gamma_s. \quad (31)$$

Assim, a energia total da placa, associada à introdução da fenda, é dada por [30]:

$$U = U_0 + U_a + U_{\gamma} = U_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 t}{E} + 4at\gamma_s, \quad (32)$$

onde

- U = Energia total da placa com fenda
- U_0 = Energia elástica da placa sem fenda
- U_a = Variação da energia elástica, causada pela introdução da fenda na placa
- U_{γ} = Variação da energia elástica total de superfície, causada pela formação das superfícies da fenda
- γ_s = Energia de superfície específica
- σ = Tensão aplicada
- a = Metade do comprimento da fenda
- t = Espessura da placa
- E = Módulo de Young

A condição para o crescimento da fenda é dada por:

$$\frac{\partial U_a}{\partial a} = \frac{\partial U_{\gamma}}{\partial a}. \quad (33)$$

Derivando a equação (30) em ordem ao comprimento da fenda a , temos que:

$$\frac{\partial U_a}{\partial a} = \frac{2\pi\sigma^2 at}{E}. \quad (34)$$

Derivando também a equação (31) em ordem ao comprimento da fenda a , vem que:

$$\frac{\partial U_{\gamma}}{\partial a} = 4t\gamma_s. \quad (35)$$

Logo, substituindo estes dois resultados na equação (33), temos a seguinte condição de equilíbrio da fenda:

$$2\gamma_s = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}. \quad (36)$$

Griffith [26][27], reescreveu a equação (36) do seguinte modo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}, \quad (37)$$

para o estado plano de tensão, e

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a(1-\nu^2)}}, \quad (38)$$

para o estado plano de deformação, onde ν é o Coeficiente de Poisson.

Como o coeficiente de Poisson varia aproximadamente entre 0.25 a 0.33 para a maioria dos metais, podemos dizer que a diferença entre o estado plano de tensão e estado plano de deformação não é muito significativo.

2.7 Método G – Taxa de Libertação de Energia

Irwin [33] designou o lado direito da equação (36) de *Taxa de Libertação de Energia*, G , e escreveu-a do seguinte modo:

$$G = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}. \quad (39)$$

O lado esquerdo da equação (36) representa o aumento de energia de superfície e é designado por *Resistência da Fenda*, R :

$$R = 2\gamma_s. \quad (40)$$

A taxa de libertação de energia deve ser maior do que a resistência da fenda, antes da fenda começar a crescer. Se a resistência da fenda é constante, significa que a taxa de libertação de energia elástica atinge um valor crítico G_c , a partir do qual a fractura acontece, ou seja, $G_c = R$. Assim a fractura ocorre quando

$$G = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} > G_c = R = 2\gamma_s. \quad (41)$$

Logo, relacionando a equação (37) com a (41), vem que:

$$\sigma = \sqrt{\frac{EG_c}{\pi a}}, \quad (42)$$

que representa uma das relações mais importantes na mecânica da fractura linear elástica.

Consideremos agora uma placa de espessura t , com uma fenda de tamanho a e sujeita a um carregamento P , conforme ilustrado na Figura 2.7. Sob acção do carregamento, os pontos de aplicação da carga sofrem um deslocamento relativo v . Quando a fenda aumentar uma quantidade da , o deslocamento irá aumentar dv . Logo o trabalho realizado pela força externa é, neste caso, Pdv .

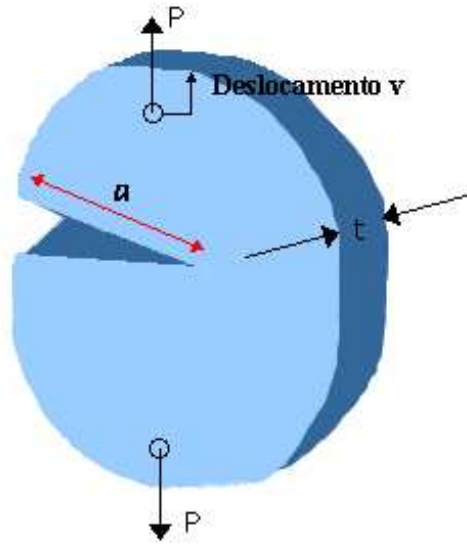


Figura 2.7 – Placa com fenda, sujeita a um carregamento P.

Assim a taxa de libertação de energia é dada por [10]:

$$G = \frac{d}{da}(F - U) = \frac{1}{t} \left(P \frac{dv}{da} - \frac{dU}{da} \right), \quad (43)$$

onde U é a energia de deformação elástica total.

Desde que não haja crescimento da fenda, o deslocamento v é proporcional ao carregamento, ou seja

$$v = CP, \quad (44)$$

onde C é a flexibilidade (inverso da rigidez). A energia potencial elástica contida na placa é então descrita da seguinte forma:

$$U = \frac{1}{2} P v = \frac{1}{2} C P^2. \quad (45)$$

Logo,

$$\frac{dU}{da} = \frac{1}{2} P^2 \frac{\partial C}{\partial a} + C P \frac{dP}{da}, \quad (46)$$

e

$$\frac{dv}{da} = P \frac{\partial C}{\partial a} + C \frac{dP}{da}. \quad (47)$$

Usando as equações (46) e (47), podemos reescrever a equação (43) do seguinte modo [34][45]:

$$G = \frac{1}{t} \left(P^2 \frac{\partial C}{\partial a} + C P \frac{dP}{da} - \frac{1}{2} P^2 \frac{\partial C}{\partial a} - C P \frac{dP}{da} \right) = \frac{P^2}{2t} \frac{\partial C}{\partial a}. \quad (48)$$

No ponto de estacionariedade da fenda, a taxa de libertação de energia crítica pode então ser estimada da seguinte forma:

$$G_c = \frac{P_{\max}^2}{2t} \cdot \frac{\partial C}{\partial a}, \quad (49)$$

onde C representa a flexibilidade da placa, que por sua vez depende do tamanho a da fenda existente. Uma vez estabelecida esta relação (tamanho da fenda/flexibilidade), G_c pode ser determinado através do conhecimento da carga máxima, P_{\max} , que conduz à fractura.

2.8 Relação entre K e G

Conforme ilustrado na equação (42), a taxa de libertação de energia elástica é proporcional a σ^2 / E , ou seja:

$$G_I = C_1 \frac{\sigma^2 \lambda}{E} = \frac{\pi \sigma^2 a}{E}, \quad (50)$$

onde C_1 é uma constante e λ é um comprimento característico. No caso de uma placa com uma fenda de aresta a ou numa fenda central de tamanho $2a$, o único tamanho característico possível é a . Para uma ponta da fenda, $C_1 = \pi$. O índice I em G_I significa que o carregamento é para o modo de abertura (modo I).

A partir da equação (50) temos que, para o estado plano de tensão:

$$G_I = K_I^2 / E. \quad (51)$$

Este resultado pode ser demonstrado de outra forma. Consideremos uma placa infinita contendo uma fenda de comprimento inicial a , sujeita ao modo I de carregamento (Figura 2.8). Assuma-se que é possível fechar a fenda, através da aplicação de um campo de tensões de compressão nas faces da fenda, entre $x=0$ e $x=\delta$. O trabalho necessário para fechar a fenda será dado pela expressão:

$$W = 2 \int_0^\delta \frac{\sigma_y v}{2} dr. \quad (52)$$

O factor 2 é devido ao facto de ambas as faces da fenda serem comprimidas.

Temos que σ_y é a distribuição de tensões compressivas e v é o deslocamento de abertura da fenda. Como o trabalho elástico é libertado sob a forma de energia, a taxa de libertação de energia elástica, G , para o modo I de deformação pode ser então obtida da seguinte forma:

$$G_I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{W}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2}{\delta} \int_0^\delta \frac{\sigma_y v}{2} dr. \quad (53)$$

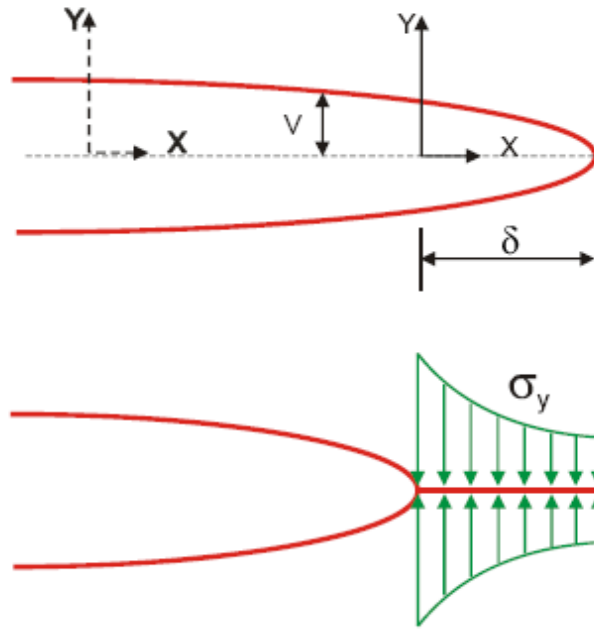


Figura 2.8 – Ponta da fenda.

As tensões σ_y podem ser definidas em termos do factor de intensidade de tensão da seguinte forma (29):

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (54)$$

e os deslocamentos v são dados por [10]:

$$v = \frac{2\sigma}{E} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2K_I}{E} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{\pi a}}. \quad (55)$$

Observando que $x = r + a - \delta$ e ignorando os termos de 2ª ordem nos cálculos efectuados, podemos reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$\begin{aligned} v &= \frac{2K_I}{E\sqrt{\pi}} \sqrt{2\delta - 2r + \frac{2r\delta}{a} - \frac{r^2}{a}} \\ &= \frac{2K_I}{E\sqrt{\pi}} \sqrt{2(\delta - r)} \end{aligned} \quad (56)$$

Substituindo a equação (56) na equação (53), temos que:

$$G_I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2K_I^2}{\pi E \delta} \int_0^\delta \sqrt{\frac{\delta - r}{r}} dr. \quad (57)$$

Integrando e aplicando o limite, obtemos:

$$G = \frac{K_I^2}{E}, \quad (58)$$

para o Estado Plano de Tensão, e

$$G_I = (1 - \nu^2) \frac{K_I^2}{E}, \quad (59)$$

para o Estado Plano de Deformação.

As duas expressões anteriores são as relações gerais entre o factor de intensidade de tensão K_I e a taxa de libertação de energia G_I , para o Modo I de deformação. De igual modo pode-se obter para os modos II e III, as seguintes relações:

$$G_{II} = (1 - \nu^2) \frac{K_{II}^2}{E} \quad (60)$$

e

$$G_{III} = (1 - \nu) \frac{K_{III}^2}{E}. \quad (61)$$

Quando os três modos de carregamento estão presentes, a taxa de energia total libertada pode ser obtida adicionando a taxa de libertação de energia dos diferentes modos, isto é:

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} = \frac{1 - \nu^2}{E} \left(K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1 - \nu} \right). \quad (62)$$

2.9 Método do Integral J

Como foi referido no capítulo 1, o integral J foi introduzido na Mecânica da Fractura em 1967 e 1968 por Cherepanov [18] e por Rice [42], respectivamente. Rice [42] mostrou que o integral J é idêntico à taxa de libertação de energia:

$$J = -\frac{\partial U}{\partial a}, \quad (63)$$

para uma área da fenda Δa e onde U é a energia potencial elástica. Hutchinson [31], Rice e Rosengreen [43] derivaram as tensões singulares e os campos das deformações na ponta da fenda, onde o integral J funciona como factor de intensidade de tensão. Para o caso de materiais metálicos em regime elástico, o integral J é relacionado com os factores de intensidade de tensão da seguinte forma:

$$J = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2, \quad (64)$$

onde I, II e III denotam os três modos de deformação na mecânica da fractura linear elástica.

Rice [42] definiu um balanço energético, F_i , ao longo de um contorno fechado B , como sendo:

$$F_i = \int_{\partial B} (W(\epsilon_{mn}) - \sigma_{jk} n_k u_{j,i}) ds, \quad (65)$$

onde F_i é diferente de zero quando B contém a singularidade. Na equação (65), u é o vector deslocamento na direcção de x_i , s é o comprimento do contorno fechado e W é a densidade de energia de deformação:

$$W = W(x_1, x_2) = W(\epsilon) = \int_0^\epsilon \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}. \quad (66)$$

Para melhor descrever o integral J , consideremos uma fenda que se propaga segundo o eixo x_1 e um campo de deformações bidimensionais, de acordo com a Figura 2.9, numa placa de espessura constante, h , i.e., $dS = hds$. O contorno fechado

$$\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma^+ \cup \Gamma_2 \cup \Gamma^-, \quad (67)$$

não inclui a singularidade, logo, segundo Rice [42]:

$$\frac{F_i}{h} = \oint_{\Gamma_0} (W n_i - \sigma_{jk} n_k u_{j,i}) ds = \int_{\Gamma_1}^{\leftarrow} [\] ds + \int_{\Gamma^+} [\] ds + \int_{\Gamma_2}^{\rightarrow} [\] ds + \int_{\Gamma^-} [\] ds = 0. \quad (68)$$

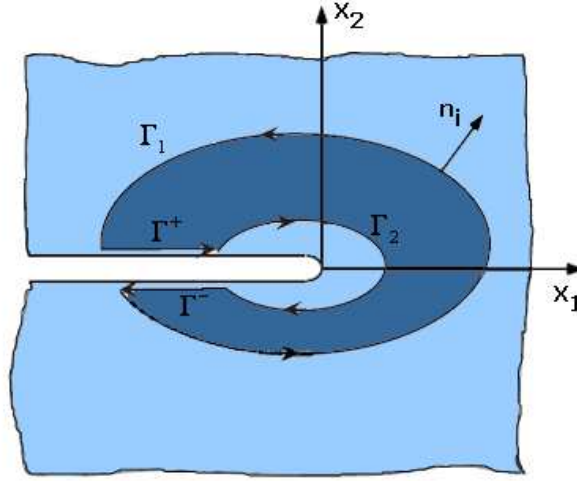


Figura 2.9 – Sistema de coordenadas para o cálculo do integral J.

Assumindo que as bordas da fenda são direitas e livres de tensões

$$\begin{aligned} n_i ds &= \sin v ds = dx_2 = 0 \text{ para } \Gamma^+, \Gamma^-, \\ \sigma_{jk} n_k &= \bar{t}_j = 0 \text{ para } \Gamma^+, \Gamma^-, \end{aligned} \quad (69)$$

as primeiras componentes dos integrais ao longo dos respectivos contornos, Γ^+, Γ^- , desaparecem:

$$\int_{\Gamma^+} [W dx_2 - \sigma_{jk} n_k u_{j,1} ds] = \int_{\Gamma^-} [W dx_2 - \sigma_{jk} n_k u_{j,1} ds] ds = 0. \quad (70)$$

Logo, porque

$$\int_{\Gamma_2}^{\rightarrow} [] ds = - \int_{\Gamma_2}^{\leftarrow} [] ds, \quad (71)$$

obtem-se a primeira componente do integral J:

$$J_1 = \int_{\Gamma_1}^{\leftarrow} [W dx_2 - \sigma_{jk} n_k u_{j,1} ds] = \int_{\Gamma_2}^{\leftarrow} [] ds = \int_{\Gamma}^{\leftarrow} []. \quad (72)$$

Como os contornos Γ_1 e Γ_2 têm sinais opostos, conclui-se que o integral J é independente do contorno escolhido e que J pode ser determinado através da análise de tensões, onde σ e ε são definidos num contorno arbitrário circundante da fenda, mas distante desta. Assim, será possível determinar o integral J através da análise de elementos finitos, com σ e ε obtidos numa localização distante da ponta da fenda.

Esta primeira componente do vector J é o integral J introduzido por Rice [42] e Cherepanov [18], definindo que o contorno da integração é contrário aos ponteiros do relógio, i.e., matematicamente positivo, à volta da fenda. Assim o integral J define-se como um integral de linha de acordo com a equação seguinte:

$$J = \int_{\Gamma} (W dx_2 - \sigma_{jk} n_k u_{j,1} ds) = \int_{\Gamma} \left(W dx_2 - T \frac{\partial u}{\partial x} ds \right), \quad (73)$$

onde T é o vector de tracção ao longo de Γ , definido na direcção da normal exterior \vec{n} do contorno, da seguinte forma:

$$T_j = \sigma_{ij} n_i. \quad (74)$$

Assim, para materiais lineares elásticos, J é uma extensão do conceito de G (taxa de libertação de energia elástica, definida para o domínio elástico). Desta forma, é possível relacionar o valor do Integral J com o valor de K , quando o material apresenta um comportamento linear elástico:

$$J = G = \frac{K^2}{E} \rightarrow \text{Estado Plano de Tensão} \quad (75)$$

$$J = G = \frac{K^2}{E} (1 - \nu^2) \rightarrow \text{Estado Plano de Deformação} \quad (76)$$

2.10 XFEM - Método dos Elementos Finitos Estendido

O Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM) tem sido usado recentemente com sucesso em várias aplicações na Mecânica da Fractura, nomeadamente no estudo da propagação de fendas. Introduzido em 1999 por Black e Belytschko [7], XFEM é um método onde a fenda é representada como uma descontinuidade no campo de deslocamentos do elemento finito, sendo a região perto da fenda enriquecida com um campo de deslocamentos, de forma a representar a singularidade das tensões na ponta da fenda. O conceito mais importante neste método é o “enriquecimento”, que significa que a aproximação do deslocamento é enriquecida (incorporada) por funções adicionais específicas ao problema.

No caso da propagação de fendas, a Função de Heaviside é usada para permitir representar a descontinuidade no campo de deslocamentos do elemento. Nas zonas perto da ponta da fenda, são usadas também funções trigonométricas assintóticas para modelar a singularidade na ponta da fenda (os nós que contêm a ponta da fenda e na sua vizinhança são enriquecidos).

O método XFEM pode ser usado em situações em que as descontinuidades (fendas) não estejam alinhadas com a malha de elementos finitos [7][36]. Logo a simulação da propagação das fendas pode ser efectuada para malhas arbitrárias de elementos finitos. Contudo, a integração numérica de elementos cortados pela descontinuidade necessita de um tratamento especial. O método adoptado mais comum consiste em dividir o elemento em subdomínios, nos dois lados da linha de descontinuidade [36].

De seguida é apresentado, de forma resumida, o método XFEM.

2.10.1 Construção da aproximação de elementos finitos com descontinuidades

De acordo com a Figura 2.10a, consideremos um domínio Ω , com uma fronteira Γ e uma fronteira interna Γ_c (que represente uma fenda) [21].

Consideremos agora uma malha uniforme, com N nós (Figura 2.10b), que não modela a descontinuidade. A aproximação discreta para o campo de deslocamentos u^h é dada por [21][36]:

$$u^h(x) = \sum_I N_I(\xi(x)) u_I, \quad (77)$$

onde N_I é a função de forma para o nó I (em função das coordenadas $\xi(x)$), e u_I é o vector dos graus de liberdade que representa os deslocamentos nodais.

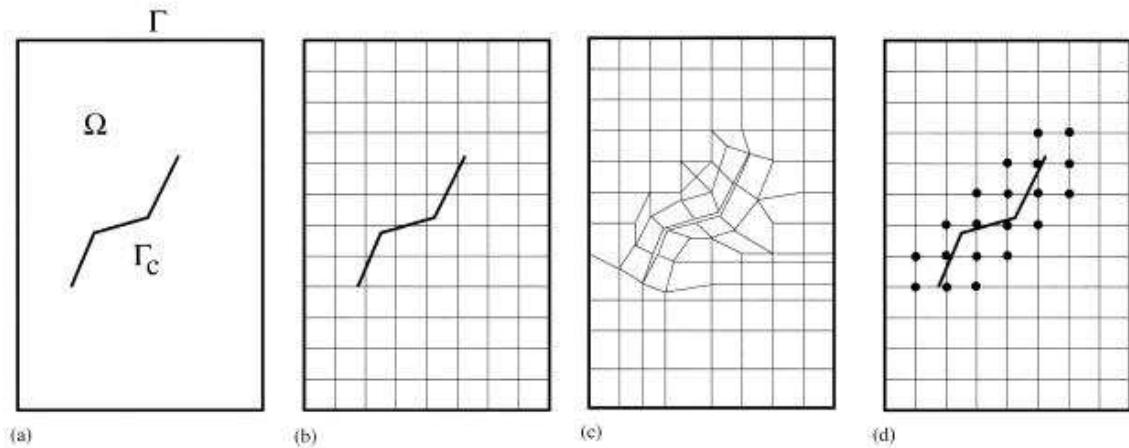


Figura 2.10 – (a) Domínio com uma fronteira interna Γ_c . (b) Malha que não modela a fronteira interna. (c) Adaptação da malha à geometria de Γ_c . (d) Malha uniforme, onde os nós a negrito têm graus de liberdade adicionais e funções de enriquecimento.

A aproximação tradicional para a mecânica da fractura linear elástica é modificar a malha de modo a adaptar-se à descontinuidade, como mostra a Figura 2.10c, onde as arestas dos elementos finitos estão alinhadas com Γ_c .

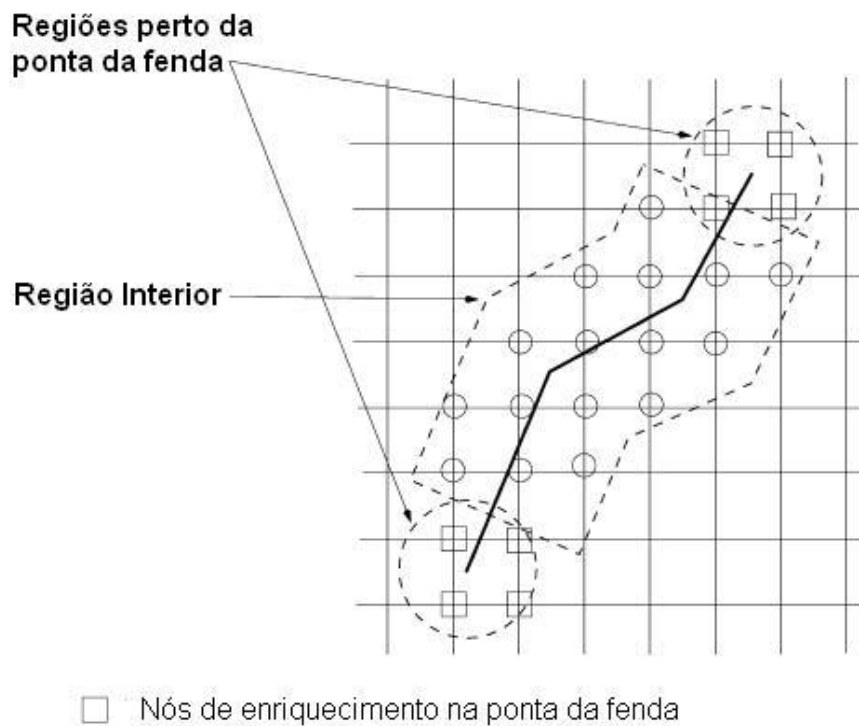


Figura 2.11 – Regiões da fenda para o enriquecimento.

O método XFEM propõe, para uma malha arbitrária como a da Figura 2.11, que se identifiquem três regiões diferentes para a geometria da fenda, chamadas região interior e duas regiões perto da ponta da fenda. Assim, os nós dos elementos finitos contidos na região interior (nós representados a círculo na Figura 2.11), vão ser enriquecidos com as funções de enriquecimento descontínuas $H(x)$. Esta função, no sistema de coordenadas local da fenda, é definida como [36]:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } y > 0 \\ -1 & \text{para } y < 0 \end{cases}. \quad (78)$$

onde y é definido de acordo com a Figura 2.12.

Os nós dos elementos finitos situados na região perto da ponta da fenda (nós com quadrado, na Figura 2.11), vão ser enriquecidos com funções adicionais que pretendem reproduzir melhor o campo de tensões singular na ponta da fenda. Para o caso de problemas de estados planos, estas funções são dadas por [7][21][36]:

$$\{F_l(r, \theta)\}_{j=1}^4 \equiv \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\}, \quad (79)$$

onde (r, θ) são as coordenadas locais polares para a ponta da fenda (Figura 2.12).

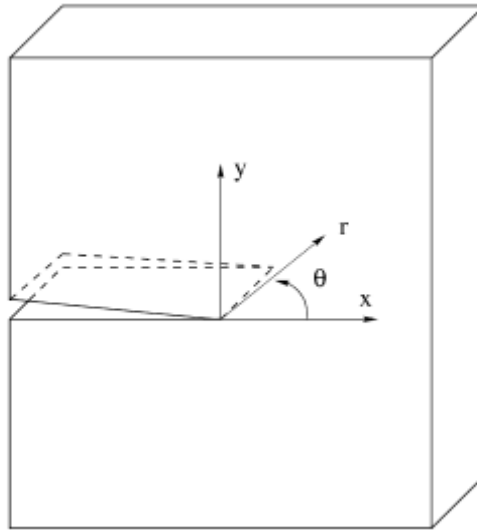


Figura 2.12 – Sistema de coordenadas locais polar na ponta da fenda.

Assim, o campo de deslocamentos enriquecidos com as funções singulares na ponta da fenda é obtido através da seguinte expressão [21][36]:

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^n N_I u_I + \sum_J N_J H(x) b_J + \sum_{K \in K_1} N_K \left(\sum_{l=1}^4 c_{Kl}^1 F_l^1(x) \right) + \sum_{K \in K_2} N_K \left(\sum_{l=1}^4 c_{Kl}^2 F_l^2(x) \right), \quad (80)$$

onde b_J e c_{Kl}^1, c_{Kl}^2 ($l=1, \dots, 4$) são os graus de liberdade adicionais correspondentes às funções de enriquecimento $H(x)$, $F_l^1(x)$ e $F_l^2(x)$, respectivamente.

A vantagem deste método é a possibilidade de determinar os factores de intensidade de tensão sem ser necessário ter níveis de refinamento de malha elevados. Porém, embora este método tenha sido alvo de extensos desenvolvimentos, a matriz de rigidez de um elemento finito enriquecido com o campo singular de deformações acrescentadas apresenta alguns maus condicionamentos [1], inclusive em algumas situações apresentando-se como não definida positiva, o que dificulta a sua inversão e consequente análise pelo método dos elementos finitos.

2.11 Elementos Finitos Singulares

Na Mecânica da Fractura Linear Elástica, o cálculo dos factores de intensidade de tensão é um dos principais objectivos de análise. Chan [17] foi um dos primeiros a utilizar o método dos elementos finitos para determinar os factores de intensidade de tensão. A principal dificuldade encontrada pelos investigadores foi a de representar a singularidade na ponta de fenda com os elementos finitos convencionais. A partir de então, vários investigadores procuraram criar elementos especiais para modelar esta singularidade (Hellen [28], Zienkiewicz [51]). Os elementos singulares “quarter-points”, isoparamétricos, sugeridos independentemente por Henshell e Shaw [29] e Barsoum [5], tornaram-se populares entre os investigadores por serem mais simples e proporcionarem resultados mais precisos com malhas relativamente grosseiras.

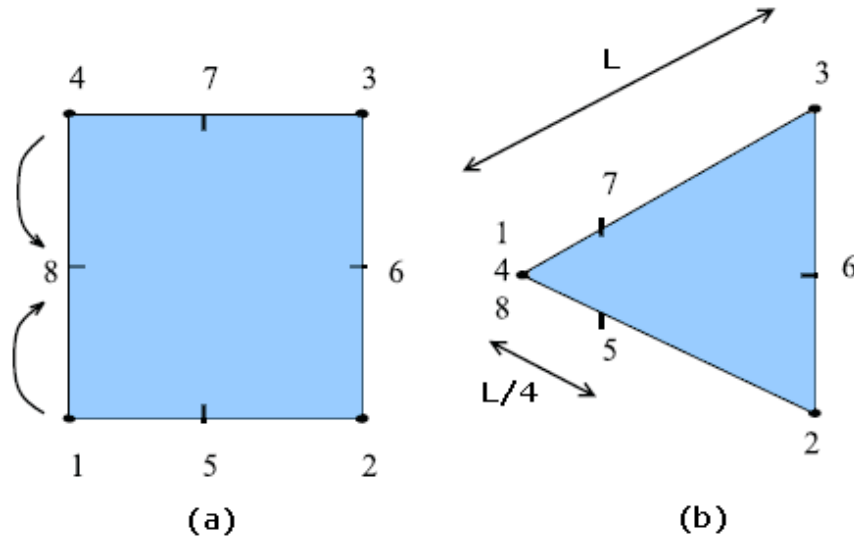


Figura 2.12 – Elementos singulares quarter-points: (a) quadrilateral; (b) triangular.

Henshell e Shaw [29] apresentaram o elemento quadrangular “quarter-point” (Figura 2.12a), Barsoum [5] descobriu que deslocando os nós da ponta da fenda, na posição $l/2$ de acordo com a Figura 2.11a, para a posição $l/4$ do lado do elemento, os campos de tensões singulares que ocorrem na ponta da fenda podem ser representados de uma forma mais eficiente. Assim, na Figura 2.12b os nós da ponta da fenda 1, 4 e 8, são movidos para o mesmo ponto, na ponta da fenda, e os nós do meio (na Figura 2.11a, os nós 7 e 5) são deslocados para $1/4$ do lado. A descoberta dos elementos “quarter-points” teve grande importância no desenvolvimento dos elementos finitos para a mecânica da fractura linear elástica. Com estes elementos, os programas de elementos finitos podem ser usados para modelar os campos da ponta da fenda de forma mais precisa e sem o recurso a graus de liberdade adicionais, como por exemplo no caso do XFEM.

Os elementos singulares “quarter-points” são formados pelos elementos isoparamétricos convencionais, triangulares ou quadrangulares, de ordem quadrática, cuja singularidade $1/\sqrt{r}$ é introduzida desviando-se o nó que está no meio do lado do elemento ($l/2$), para a posição de $l/4$ do lado do elemento (conforme na Figura 2.12). Barsoum [5] também demonstrou que o elemento triangular proporciona melhores resultados que o elemento quadrangular.

Nos últimos anos têm aparecido vários estudos para desenvolver este tipo de elementos [1][4][25], pois os elementos “quarter-points” são bastantes eficazes para

reproduzir a singularidade e a sua integração é simples na maioria dos programas de cálculo por elementos finitos.

De seguida apresenta-se uma descrição sumária da formulação dos elementos singulares “quarter-points”.

2.11.1 Elementos “Quarter-points” a uma dimensão

De forma a se verificar a influência do deslocamento do nó para a posição $l/4$, representa-se na Figura 2.13 um elemento finito quadrático a uma dimensão. Na Figura 2.13a, está representado o espaço paramétrico (ξ) do elemento e na Figura 2.13b está representado o espaço Cartesiano (r), com a localização do nó central controlada pelo parâmetro α . A ponta da fenda está localizada na posição $r = 0$.

Usando as funções de forma de 2ª grau de Lagrange:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ N_2 &= 1-\xi^2 \\ N_3 &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi), \end{aligned} \tag{81}$$

o deslocamento u para qualquer ponto do elemento é determinado através da interpolação nodal dos deslocamentos nodais u_i :

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)u_1 + (1-\xi^2)u_2 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)u_3. \tag{82}$$

A posição de um ponto no elemento é também obtida por interpolação dos valores nodais:

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i x_i = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)x_1 + (1-\xi^2)x_2 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)x_3. \tag{83}$$

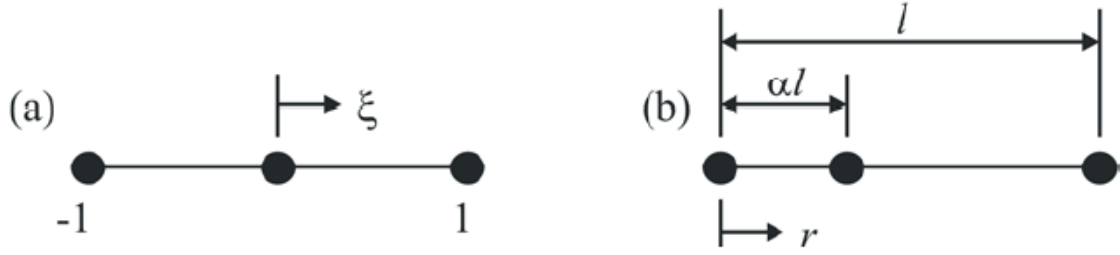


Figura 2.13 – Elemento 1-D quadrático: (a) espaço paramétrico do elemento; (b) espaço cartesiano do elemento.

Consideremos o caso onde o nó do meio está situado na posição intermédia do elemento, isto é, $\alpha = 1/2$ e $\xi = \frac{2r}{l} - 1$. Substituindo na equação (82) obtém-se:

$$u = u_1 + (-3u_1 + 4u_2 - u_3) \frac{r}{l} + 2(u_1 - 2u_2 + u_3) \frac{r^2}{l^2}. \quad (84)$$

A derivada do deslocamento u em ordem à coordenada r dá origem à deformação linear ε do elemento:

$$\varepsilon = \frac{du}{dr} = (-3u_1 + 4u_2 - u_3) \frac{1}{l} + 4(u_1 - 2u_2 + u_3) \frac{r}{l^2}. \quad (85)$$

Consideremos agora o caso em que o nó do meio do elemento é movido para a posição “quarter-point”, isto é, $\alpha = 1/4$ e $\xi = \frac{2\sqrt{lr}}{l} - 1$. Substituindo estes valores na equação (82) e derivando em ordem a r , obtemos as seguintes expressões para os deslocamentos e deformação no elemento:

$$u = u_1 + 2(u_1 - 2u_2 + u_3) \frac{r}{l} + (-3u_1 + 4u_2 + u_3) \frac{\sqrt{lr}}{l}, \quad (86)$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dr} = 2(u_1 - 2u_2 + u_3) \frac{1}{l} + \left(-\frac{3}{2}u_1 + 2u_2 - \frac{1}{2}u_3\right) \frac{1}{\sqrt{lr}}. \quad (87)$$

A deformação obtida demonstra a existência da singularidade $1/\sqrt{r}$ no campo de deformações do elemento, logo tornando mais precisa a reprodução do campo de deformações singulares na ponta da fenda do elemento.

2.11.2 Cálculo Numérico dos Factores de Intensidade de Tensão

Os factores de intensidade de tensão podem ser calculados por de três métodos diferente. A Técnica de Correlação dos Deslocamentos (TCD), proposta por Shih [46], é usada quando os elementos singulares estão presentes na ponta da fenda. Rybicki e Kanninem [44] e Raju [41] propuseram um método que calcula a taxa de libertação de energia G , usado para vários tipos de elementos, incluindo os elementos singulares quarter-point. O Método do Integral de Domínio Equivalente (IDE) [37], é usado para calcular o integral J .

De seguida, veremos em pormenor a Técnica de Correlação dos Deslocamentos.

2.11.2.1 Método de Correlação dos Deslocamentos

No Método de Correlação dos Deslocamentos, os deslocamentos nodais, determinados em pontos específicos da ponta da fenda pela análise de elementos finitos, são comparados com as soluções analíticas [3]. Esta técnica é usada quando os elementos singulares “quarter-points” estão presentes na ponta da fenda. Esta técnica permite calcular, separadamente, os factores de intensidade de tensão quando a estrutura está submetida ao modo misto de carregamento.

O deslocamento (abertura) na ponta da fenda δ , para elementos singulares “quarter-points” [46], é dado por (Figura 2.14):

$$\delta(r) = (4v_{j-1} - v_{j-2})\sqrt{\frac{r}{L}}, \quad (88)$$

onde v_{j-1} e v_{j-2} são os deslocamentos relativos na direcção y , nos nós $j-1$ e $j-2$, e L é o tamanho do elemento.

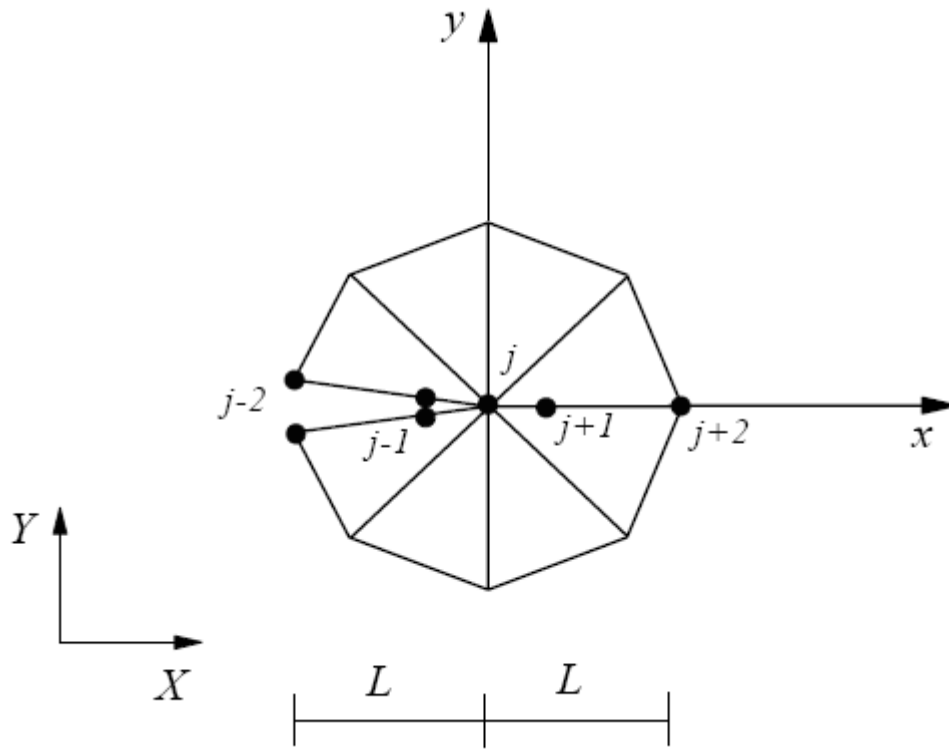


Figura 2.14 – Elemento “quarter-point” na ponta da fenda.

A expressão anterior pode ser reescrita, de acordo com a Figura 2.15, da seguinte forma:

$$\delta(r) = [4(v_2 - v_4) - (v_3 - v_5)] \sqrt{\frac{r}{L}}, \quad (89)$$

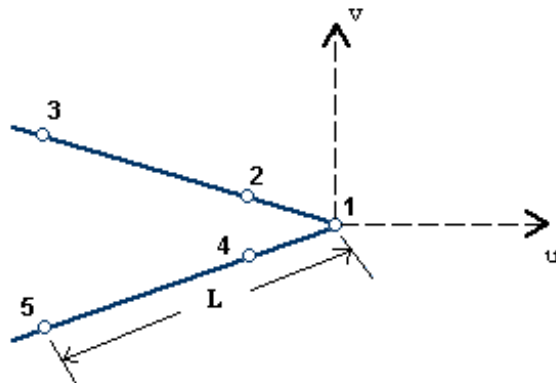


Figura 2.15 – Localização dos nós para o cálculo dos factores de intensidade de tensão.

A expressão analítica para δ a uma distância r da ponta da fenda, ao longo da face da fenda, é dada pela seguinte equação:

$$\delta(r) = K_I \left(\frac{k+1}{\mu} \right) \sqrt{\frac{r}{2\pi}}. \quad (90)$$

Na equação (90), $k = 3 - 4\nu$ para o estado plano de deformação, $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ para o estado plano de tensão, ν é o coeficiente de Poisson e $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é o módulo de rigidez ou de corte.

Igualando as expressões (89) e (90), obtemos o factor de intensidade de tensão para o modo I, sendo dado por:

$$K_I = \left(\frac{\mu}{k+1} \right) \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(v_2 - v_4) - (v_3 - v_5)]. \quad (91)$$

Seguindo os mesmos passos descritos para o modo I, encontra-se a expressão para o factor de intensidade de tensão no modo II, que é dado por:

$$K_{II} = \left(\frac{\mu}{k+1} \right) \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4(u_2 - u_4) - (u_3 - u_5)], \quad (92)$$

onde u_{j-1} e u_{j-2} são os deslocamentos relativos na direcção x , nos nós $j-1$ e $j-2$.

O método dos elementos singulares, apesar de ter provado ser um método relativamente eficiente para a extracção dos factores de intensidade de tensão para os modos I e II da deformação mecânica linear elástica da fractura, apresenta alguma sensibilidade aos valores pontuais dos deslocamentos nodais dos nós dos elementos “quarter-points”, o que implica ter um modelo de elementos finitos bastante preciso para análise.

Capítulo 3

Método das Forças

3 Método das Forças

3.1 Introdução

O método das forças é uma técnica simples e eficaz para obter os Factores de Intensidade de Tensão para os modos I e II da mecânica da fractura. Recentemente De Morais [19] mostrou que, apenas num certo raio de distância da ponta da fenda, a distribuição do factor de intensidade de tensão versus distância x_c pode ser aproximado por um comportamento linear. Segundo De Morais [19], o factor de intensidade de tensão pode ser calculado através da extrapolação linear para $x_c = 0$ da distribuição dos factores de intensidade de tensão no comprimento x_c .

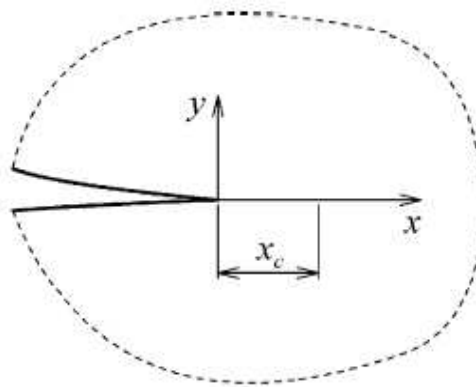


Figura 3.1 – Ponta da fenda e sistema local de coordenadas.

De Morais [19] mostrou que o método das forças permite obter valores muito precisos dos factores de intensidade de tensão para modelos de elementos finitos lineares, mesmo quando são usados elementos de integração reduzida (como no caso deste trabalho). O método de De Morais [19] foi aplicado unicamente a malhas de elementos finitos regulares, onde as forças nodais são obtidas a partir das forças de reacção nos nós

da vizinhança da ponta da fenda. Neste trabalho pretendeu-se adaptar o método de De Morais para malhas de elementos finitos genéricas na sua forma. Na secção seguinte apresenta-se com algum detalhe o método de De Morais [19].

3.2 Método de De Morais

De Morais [19] considerou um corpo com uma fenda, sujeito a carregamentos do modo misto I + II, sob condições de estado plano de tensão ou deformação (Figura 3.1). A fenda é orientada ao longo de um dos eixos de simetria do material.

As tensões perto da ponta da fenda, ao longo do eixo x , podem ser relacionadas com os factores de intensidade de tensão para os modos I e II da seguinte forma (equações (27)):

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \quad (93)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi x}} \quad (94)$$

Assim, o total das forças internas ao longo do comprimento x_c são:

$$F_y = \int_0^{x_c} \sigma_y dx = K_I \sqrt{\frac{2x_c}{\pi}} \quad (95)$$

$$F_x = \int_0^{x_c} \tau_{xy} dx = K_{II} \sqrt{\frac{2x_c}{\pi}} \quad (96)$$

Este método impõe que as malhas de elementos finitos contenham as faces dos elementos sobre o eixo x , para obter as forças nodais internas correctas (Figura 3.2). O tamanho dos elementos na vizinhança da ponta da fenda deve ser constante [19].

O método das forças foi aplicado a modelos de elementos finitos construídos com elementos quadrangulares de 8 nós e de 4 nós com integração reduzida.

Outro ponto importante deste método é a definição de x_c . O valor escolhido deverá ser aproximadamente igual a 3 mm, devendo ir até meio da posição entre o nó n e o nó seguinte, como se pode observar na Figura 3.2.

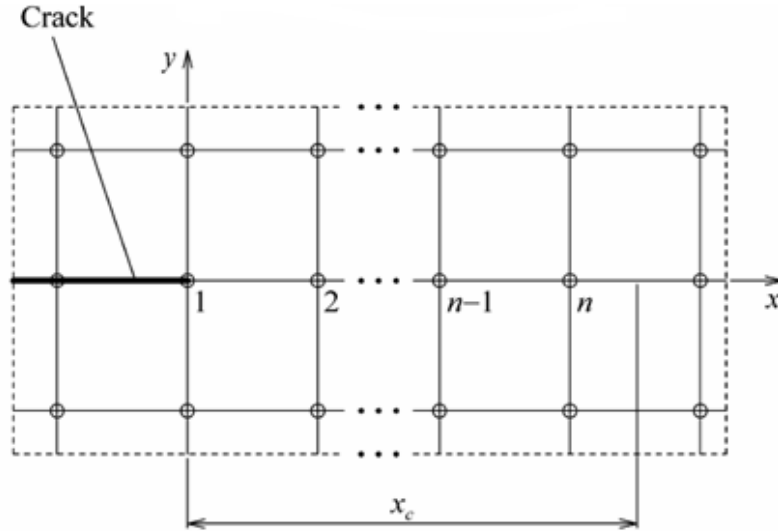


Figura 3.2 – Definição da distância x_c para o cálculo das forças, para uma malha com elementos de 4 nós.

Obtidas as forças nodais internas, a estimativa dos factores de intensidade de tensão pode ser obtida por:

$$K_I = \sqrt{\frac{\pi}{2x_c}} \sum_{i=1}^n F_{y,i} \quad (97)$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{2x_c}} \sum_{i=1}^n F_{x,i} \quad (98)$$

Os valores de K_I e K_{II} são obtidos calculando, respectivamente, a extrapolação das aproximações lineares de K_I versus x_c e K_{II} versus x_c , para $x_c = 0$. Estes valores são posteriormente comparados com as soluções teóricas (válidas para um placa rectangular com o estado plano de tensão aplicado em zonas afastadas da fenda):

$$K_I = \sigma_R (\pi a)^{1/2} \quad (99)$$

$$K_{II} = \tau_R (\pi a)^{1/2} \quad (100)$$

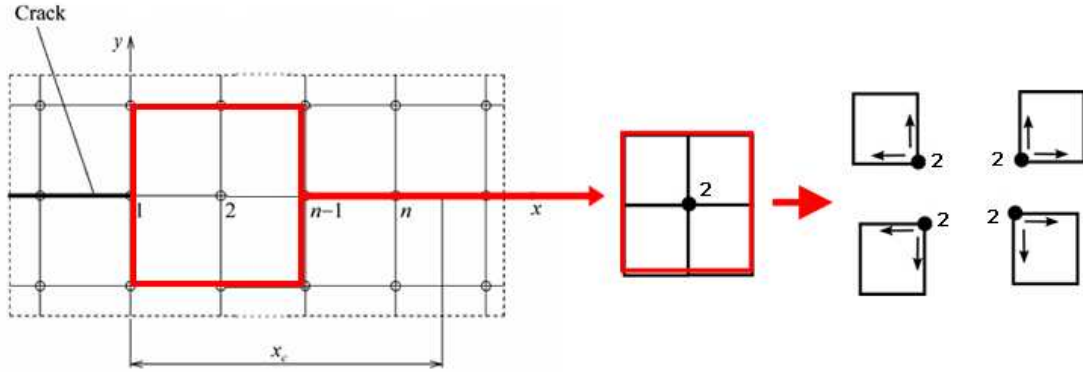


Figura 3.3 – Condição de equilíbrio.

O método de De Morais [19] não pode ser aplicado directamente numa malha geral de elementos finitos. Consideremos, por exemplo, o nó 2 da Figura 3.3 com quatro elementos adjacentes. Em cada instante de tempo numa análise pelo método dos elementos finitos, os nós estão em equilíbrio, ou seja, o somatório das forças internas resultantes do agrupamento dos elementos adjacentes ao nó tem que ser zero. Assim sendo, a aplicação do somatório das equações (97) e (98) origina:

$$\sum_i F_{x,i} = 0 \quad (101)$$

$$\sum_i F_{y,i} = 0 \quad (102)$$

O algoritmo proposto neste trabalho tem como principal objectivo adaptar o método de De Morais [19] para que ele possa ser aplicado a problemas da mecânica da fractura linear elástica, em qualquer tipo de geometria e malha de elementos finitos.

3.3 Novo Método Proposto

Para a aplicação do método de De Moraes [19] a malhas arbitrárias de elementos finitos é necessário obter as forças internas nos nós dos elementos que estão situados sobre o eixo local x (com origem na ponta da fenda, ver Figura 3.4). Foram já realizados alguns esforços para se estudar o método das forças a malhas com geometria arbitrária, onde se destaca, por exemplo, o método de Smith e Raju [47], que consiste no fundo em projectar ou corrigir as forças nodais ao longo do eixo local x . No entanto, este método apresenta resultados pouco precisos, pois a projecção das forças nodais ao longo do eixo local x depende bastante do índice de distorção dos elementos.

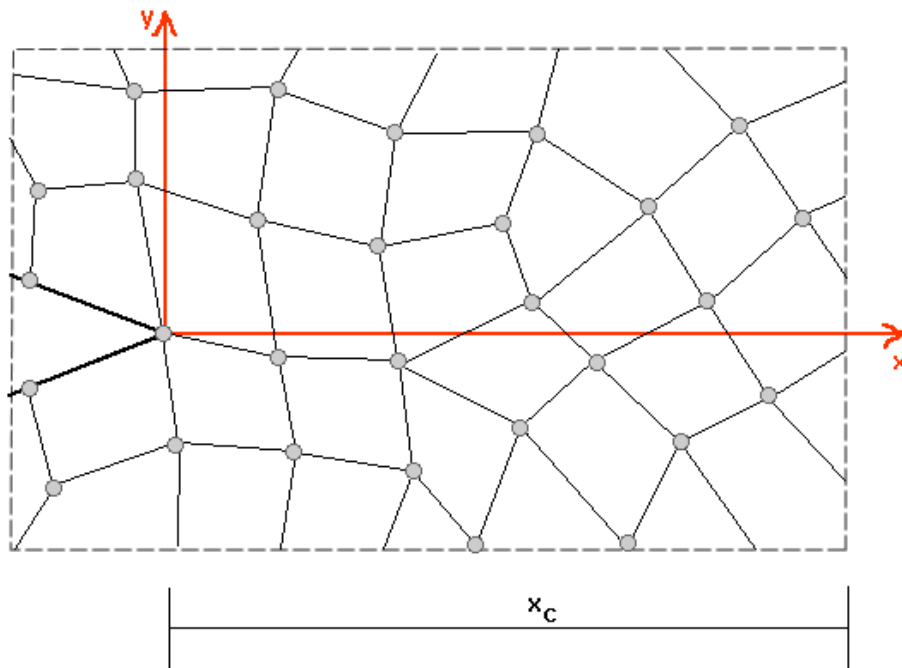


Figura 3.4 – Malha de elementos quadrangular arbitrária.

O método proposto neste trabalho consiste numa reorganização da topologia dos elementos finitos que são atravessados por esse eixo local. Assim, os elementos seleccionados são subdivididos em elementos triangulares de tal forma que os nós desses elementos triangulares fiquem situados sobre o eixo local x . Como os elementos quadrangulares, usados neste trabalho, têm um único ponto de integração de Gauss, a transferência do estado de tensão para os elementos triangulares é extremamente

simples, pois com um único ponto de integração o estado de tensão no elemento quadrangular é constante. No final, as forças internas para o cálculo dos factores de intensidade de tensão das equações (97) e (98) são obtidas através dos agrupamentos das forças internas dos elementos triangulares situados sobre o eixo local x .

3.3.1 Algoritmo

De seguida, descreve-se com maior detalhe os passos principais do novo método proposto.

1. Determinar todos os elementos quadrangulares intersectados pelo eixo x (elementos a azul/sombreado na Figura 3.5).

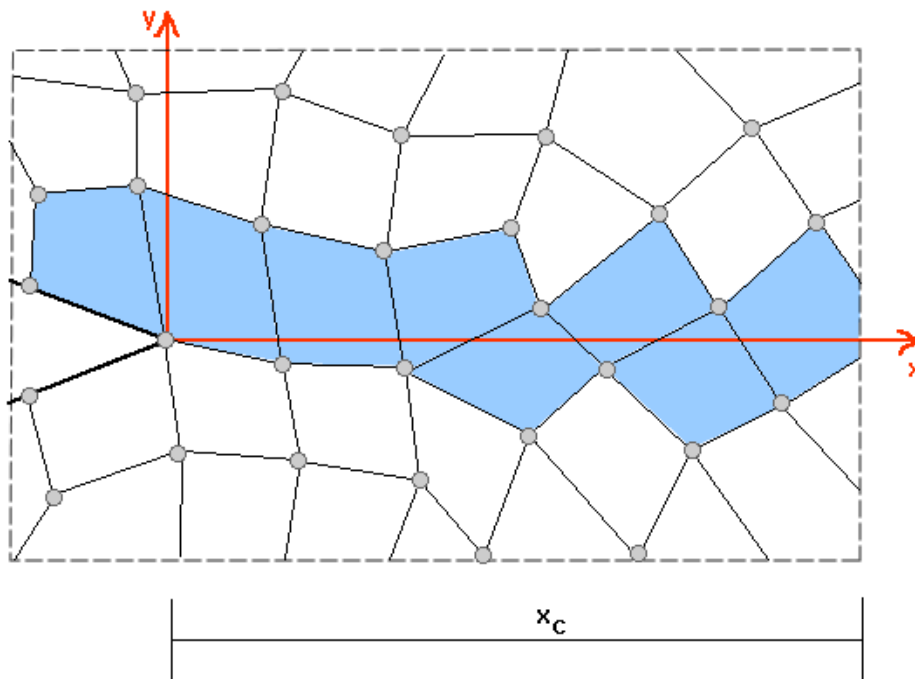


Figura 3.5 – Elementos quadrangulares intersectados pelo eixo x .

2. Para cada um destes elementos, determinar o ponto de intersecção entre as arestas do elemento e o eixo x . Se este ponto não coincidir com um nó existente (nós a branco), criar um novo nó (nós a negro, ver Figura 3.6). Para cada um destes nós,

serão calculadas posteriormente as forças internas para o cálculo dos factores de intensidade de tensão das equações (97) e (98).

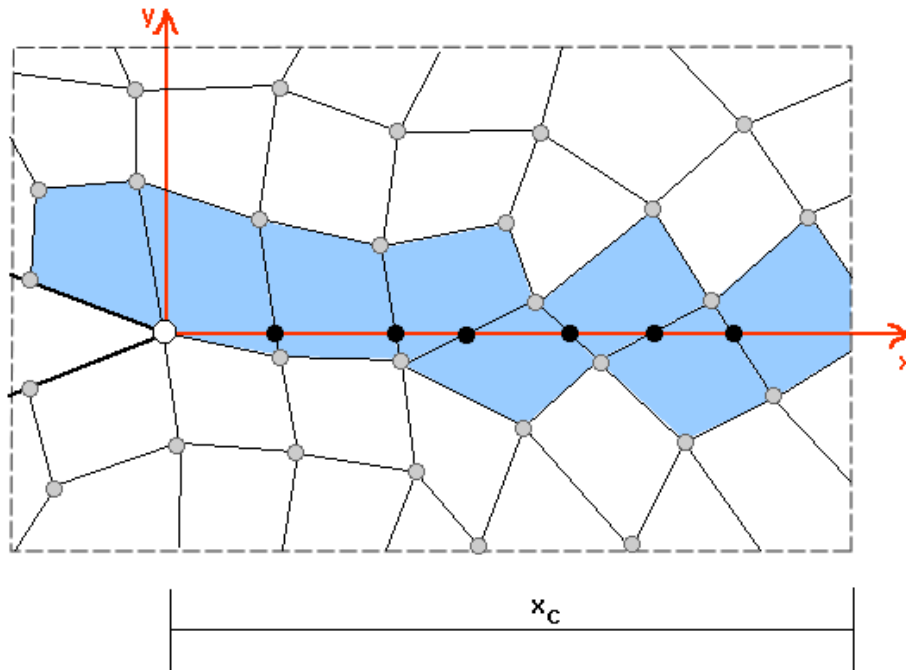


Figura 3.6 – Nós sobre o eixo x .

3. Para cada um dos elementos quadrangulares intersectados, determinar o número de nós na parte positiva do eixo y (nós a negrito na Figura 3.7).

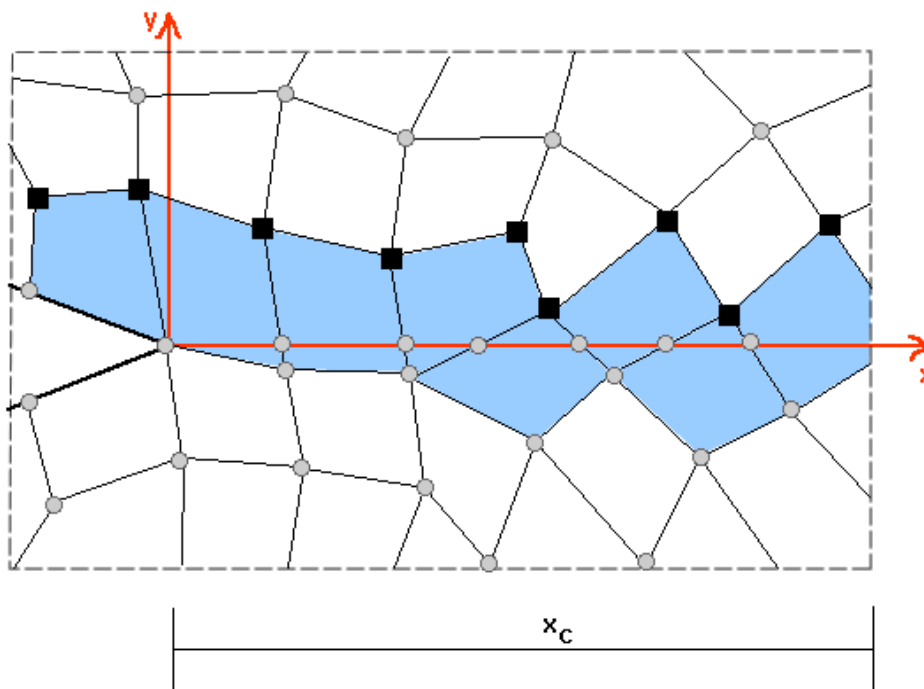


Figura 3.7 – Nós na parte positiva do eixo y .

4. De acordo com esse número, dividir o elemento quadrangular em um, dois ou três elementos triangulares. Estes três casos particulares são apresentados com maior detalhe nas Figuras 3.8, 3.9, 3.10 e 3.11.

- Caso de um nó na parte positiva do eixo y:

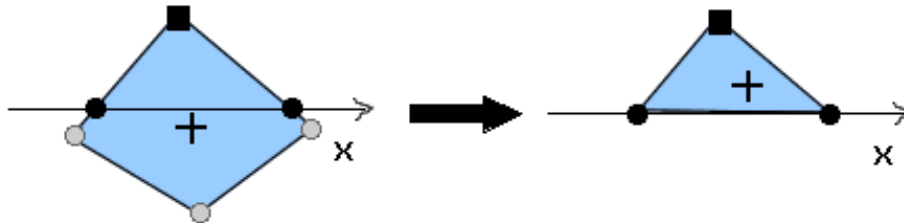


Figura 3.8 – Divisão em um triângulo.

- Caso de dois nós na parte positiva do eixo y:

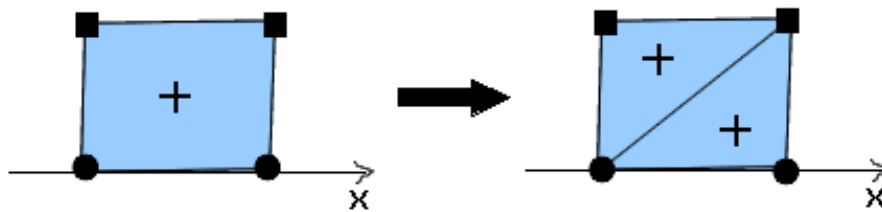


Figura 3.9 – Divisão em dois triângulos.

- Caso de três nós na parte positiva do eixo y, dois casos de divisão:

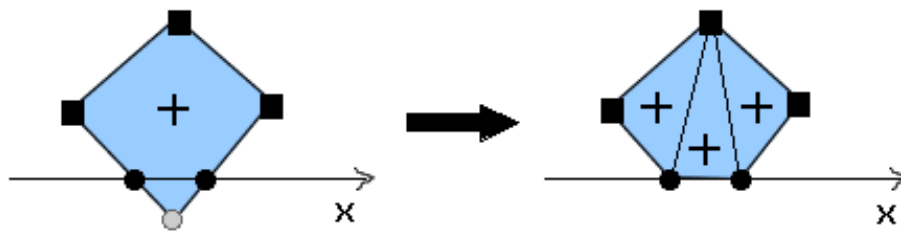


Figura 3.10 – Divisão em três triângulos.

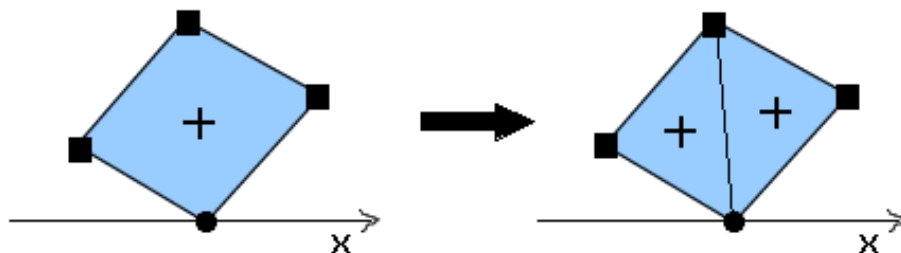


Figura 3.11 – Divisão em dois triângulos.

A subdivisão do quadrilátero em elementos triangulares depende da configuração da parte do quadrilátero situada por cima do eixo local x (conforme ilustram as Figuras 3.8, 3.9, 3.10 e 3.11).

Na figura seguinte pode observar-se um exemplo de uma malha de elementos quadrangulares, já dividida em elementos triangulares.

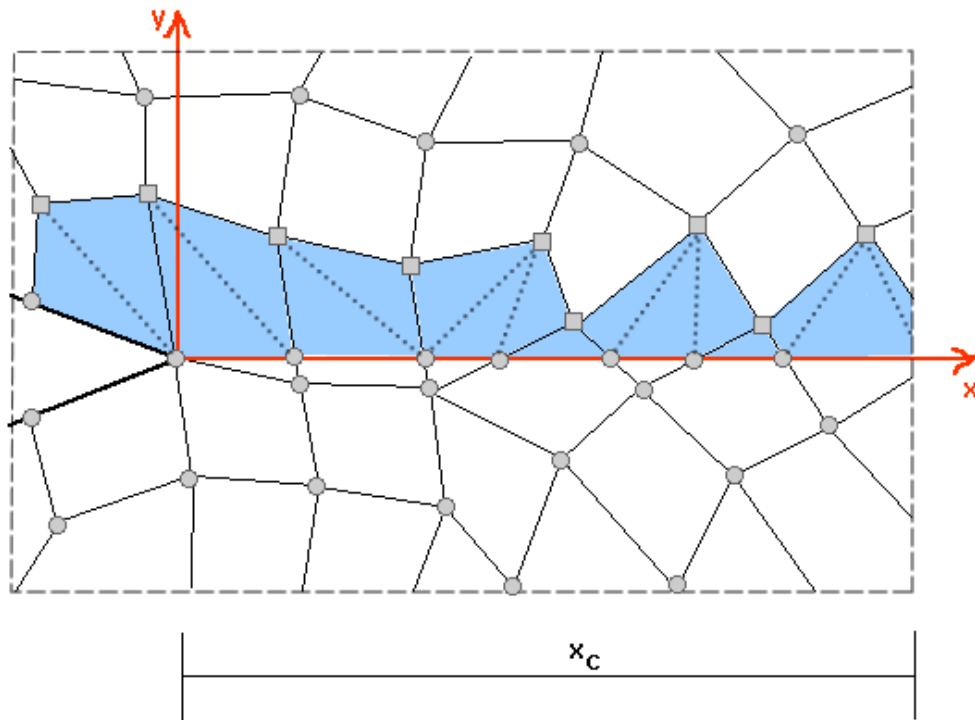


Figura 3.12 – Malha quadrangular dividida em triângulos.

Os elementos quadrangulares utilizados são de integração reduzida e os elementos triangulares têm apenas um ponto de integração de Gauss. Assim, cada um dos novos elementos triangulares vai ter um valor de tensão igual ao do elemento quadrangular que o originou. As forças internas para os nós são obtidas pelo agrupamento das forças nodais resultantes dos elementos triangulares.

De seguida apresenta-se uma breve descrição das formulações utilizadas neste trabalho para os elementos finitos quadrangulares e triangulares.

3.3.2 Elemento Quadrangular para Estado Plano de tensão

Os elementos finitos de integração reduzida têm sido bastante usados na simulação numérica de estruturas, uma vez que são computacionalmente eficientes e permitem resolver algumas patologias críticas dos elementos, com sejam por exemplo os problemas relacionados com a retenção (“locking”), que conduzem a um aumento excessivo da rigidez do sistema. Nesta secção apresenta-se o elemento quadrangular com integração reduzida, orientado para problemas de estado plano de tensão.

3.3.2.1 Cinemática

As matrizes deformação-deslocamento dos elementos usados neste trabalho são formuladas no sistema de coordenadas convectivo e posteriormente são transformadas para o sistema de coordenadas local co-rotacional, de forma a assegurar a objectividade do material e integrar convenientemente as leis constitutivas [12].

Na Figura 3.13 pode-se observar a representação do sistema de coordenadas convectivo, definido pelos vectores \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 e \mathbf{G}_3 , o sistema de coordenadas co-rotacional no centro do elemento, definido pelos vectores \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} e o sistema de coordenadas global, definido pelo sistema de eixos cartesiano \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} .

Através do referencial isoparamétrico, a região espacial física do elemento é mapeada a partir das coordenadas naturais ξ , η e ζ . Para cada elemento, as coordenadas de um determinado ponto podem ser obtidas a partir da seguinte interpolação:

$$\mathbf{x} = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \bar{\mathbf{x}}_I, \quad (103)$$

onde $\bar{\mathbf{x}}_I$ são as coordenadas dos nós e $N_I(\xi, \eta)$ são as funções de forma, definidas para cada nó I da seguinte forma:

$$N_I(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_I \xi + \eta_I \eta + h_I \xi \eta). \quad (104)$$

O referencial convectivo é descrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_1 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \frac{\partial N_I(\xi, \eta) \mathbf{x}_I}{\partial \xi}; \\
 \mathbf{G}_2 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} = \frac{\partial N_I(\xi, \eta) \mathbf{x}_I}{\partial \eta}; \\
 \mathbf{G}_3 &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta}.
 \end{aligned} \tag{105}$$

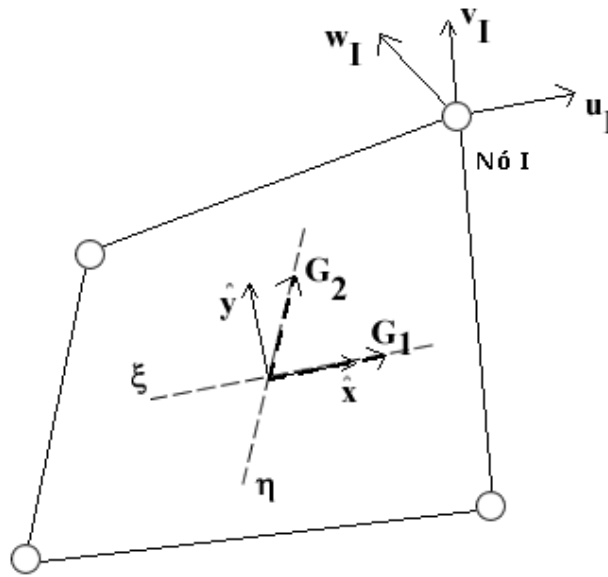


Figura 3.13 – Sistema de coordenadas.

O referencial local é definido a partir das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{G}_1}{\|\mathbf{G}_1\|}; \\
 \hat{\mathbf{z}} &= \frac{\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2}{\|\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2\|}; \\
 \hat{\mathbf{y}} &= \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}.
 \end{aligned} \tag{106}$$

Na equação (104), ξ_I, η_I e h_I são as $I^{\text{ésimas}}$ componentes nodais dos vectores

$$\begin{aligned}
 \{\xi_I\} &= (-1, 1, 1, -1), \\
 \{\eta_I\} &= (-1, -1, 1, 1), \\
 \{h_I\} &= (1, -1, 1, -1),
 \end{aligned} \tag{107}$$

correspondendo à avaliação das coordenadas nodais ξ e η no nó I do elemento. Na Figura 3.13, u_I , v_I e w_I representam os deslocamentos nodais.

O deslocamento de um ponto genérico \mathbf{u} é a diferença entre o vector posição na configuração actual ${}^{n+1}\mathbf{x}$ e o vector posição na configuração de referência ${}^n\mathbf{x}$:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = {}^{n+1}\mathbf{x}(\xi, \eta) - {}^n\mathbf{x}(\xi, \eta). \quad (108)$$

O vector dos deslocamentos \mathbf{u} pode ser obtido por interpolação do vector dos deslocamentos nodais através das funções de forma do elemento:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \mathbf{u}_I, \quad (109)$$

onde \mathbf{u}_I é o vector com os graus de liberdade nodais, descritos no referencial global x, y, z, ou seja:

$$\mathbf{u}_I = \{u_I \quad v_I \quad w_I\}^T. \quad (110)$$

No sistema de coordenadas convectivo, o tensor de deformação linear é definido pelas componentes covariantes:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{G}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j} + \mathbf{G}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{J}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j} + \mathbf{J}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \right), \quad (111)$$

onde \mathbf{J}_i são as linhas da matriz do Jacobiano \mathbf{J} . A matriz do Jacobiano e o seu determinante são expandidas no centro do elemento, para a construção das matrizes de estabilização, por forma a corrigir os modos de energia nulos [14][15][16].

No sistema de coordenadas convectivo, o tensor de deformação é construído a partir de uma matriz de deformação-deslocamento $\bar{\mathbf{B}}$, definida no sistema de coordenadas convectivo, ou seja:

$$\bar{\varepsilon}_i = \{\bar{\varepsilon}_{11} \quad \bar{\varepsilon}_{22} \quad \bar{\varepsilon}_{33} \quad 2\bar{\varepsilon}_{12}\}^T = \bar{\mathbf{B}}_I \cdot \mathbf{u}_I. \quad (112)$$

Para construir a matriz $\bar{\mathbf{B}}_I$ na equação (112), o campo dos deslocamentos obtidos a partir da equação (109) é substituído na equação (111), obtendo-se uma componente constante (em ξ e η) e outra componente linear, que são importantes para a derivação das matrizes de estabilização. A forma final do tensor de deformação é obtida separando os campos constantes e lineares em relação a ξ e η , da seguinte forma:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\xi, \eta) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^H(\xi, \eta), \quad (113)$$

onde $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$ é o tensor de deformação constante, pois é independente das variáveis ξ e η , $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^H$ está relacionado com os modos de deformação de energia nulos. Esta separação resulta nas seguintes matrizes deformação-deslocamento para o campo constante das deformações:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 = \bar{\mathbf{B}}_I^0 \cdot \mathbf{u}_I = \bar{\mathbf{B}}_{II}^0 \cdot \mathbf{u}_I, \quad (114)$$

e para as matrizes de estabilização:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^H(\xi, \eta) = \bar{\mathbf{B}}_I^H \cdot \mathbf{u}_I = (\xi \bar{\mathbf{B}}_{1I}^H + \eta \bar{\mathbf{B}}_{2I}^H + \xi \eta \bar{\mathbf{B}}_{5I}^H) \cdot \mathbf{u}_I. \quad (115)$$

A vantagem desta expansão das matrizes de deformação-deslocamento no centro dos elementos, consiste na possibilidade de se obter as matrizes que estabilizam o elemento. Os termos de energia nulos na equação (115) permitem concluir que a integração numérica no centro dos elementos resulta num campo de deformações instável, devido às componentes de deformação lineares deixarem de existir no centro do elemento ($\xi = \eta = 0$). O procedimento adoptado para evitar o tensor de deformação instável é integrar os termos de deformação da equação (115) analiticamente. Este procedimento torna a construção do campo estabilizado eficiente, sem utilizar parâmetros artificiais empíricos. Exemplos deste procedimento podem ser encontrados nos trabalhos de Belytschko e Leviathan [8], Cardoso et al. [14] e Cardoso et al. [15].

O tensor das deformações é então transformado do sistema de coordenadas convectivo para o sistema de coordenadas local co-rotacional, de forma a se poder aplicar as equações materiais constitutivas e assegurar a objectividade [12]. A transformação é aplicada às matrizes de deformação-deslocamento convectivas através duma transformação de segunda ordem da matriz \mathbf{Q} . Esta matriz \mathbf{Q} é dada por [12]:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \xi_{,\hat{x}} \xi_{,\hat{x}} & \eta_{,\hat{x}} \eta_{,\hat{x}} & \xi_{,\hat{x}} \eta_{,\hat{x}} \\ \xi_{,\hat{y}} \xi_{,\hat{y}} & \eta_{,\hat{y}} \eta_{,\hat{y}} & \xi_{,\hat{y}} \eta_{,\hat{y}} \\ 2\xi_{,\hat{x}} \xi_{,\hat{y}} & 2\eta_{,\hat{x}} \eta_{,\hat{y}} & \xi_{,\hat{x}} \eta_{,\hat{y}} + \eta_{,\hat{x}} \xi_{,\hat{y}} \end{bmatrix}. \quad (116)$$

Os passos necessários para construir a matriz de transformação \mathbf{Q} são os seguintes:

- Primeiro construir matriz do Jacobiano \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{I,\xi} \cdot x_I & N_{I,\xi} \cdot y_I & N_{I,\xi} \cdot z_I \\ N_{I,\eta} \cdot x_I & N_{I,\eta} \cdot y_I & N_{I,\eta} \cdot z_I \\ N_{I,\zeta} \cdot x_I & N_{I,\zeta} \cdot y_I & N_{I,\zeta} \cdot z_I \end{bmatrix} \quad (I=1,2,3), \quad (117)$$

e inverter a matriz \mathbf{J} , de forma a “ligar” o sistema de coordenadas global e o natural, tal como a transformação entre o sistema de coordenadas co-rotacional local e o global:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} & \zeta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} & \zeta_{,y} \\ \xi_{,z} & \eta_{,z} & \zeta_{,z} \end{bmatrix}. \quad (118)$$

- Depois, construir a matriz de transformação entre o referencial global e o referencial local, ou seja:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{,x} & \hat{y}_{,x} & \hat{z}_{,x} \\ \hat{x}_{,y} & \hat{y}_{,y} & \hat{z}_{,y} \\ \hat{x}_{,z} & \hat{y}_{,z} & \hat{z}_{,z} \end{bmatrix}. \quad (119)$$

- Finalmente, os termos da matriz de transformação \mathbf{Q} da equação (116) são obtidos pela seguinte expressão:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_{,\hat{x}} & \eta_{,\hat{x}} & \zeta_{,\hat{x}} \\ \xi_{,\hat{y}} & \eta_{,\hat{y}} & \zeta_{,\hat{y}} \\ \xi_{,\hat{z}} & \eta_{,\hat{z}} & \zeta_{,\hat{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{,x} & \hat{x}_{,y} & \hat{x}_{,z} \\ \hat{y}_{,x} & \hat{y}_{,y} & \hat{y}_{,z} \\ \hat{z}_{,x} & \hat{z}_{,y} & \hat{z}_{,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} & \zeta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} & \zeta_{,y} \\ \xi_{,z} & \eta_{,z} & \zeta_{,z} \end{bmatrix}. \quad (120)$$

Primeiro são transformadas as matrizes constantes de deformação-deslocamento $\bar{\mathbf{B}}_{II}^0$:

$$\tilde{\mathbf{B}}_{II}^0 = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}_{II}^0, \quad (121)$$

e depois as matrizes de estabilização:

$$\hat{\mathbf{B}}_{\alpha I}^H = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}}_{\alpha I}^H, \quad (\alpha=1 \approx 3). \quad (122)$$

O elemento quadrangular com integração reduzida apresenta uma deficiência que necessita de ser corrigida através da construção de uma projecção num subespaço de deformações, que é invariante ao movimento resultante de uma rotação de corpo rígido em relação ao centro do elemento [9][14]. Por outras palavras, o campo de deformações do elemento com integração reduzida apresenta deformações parasitas quando o elemento sofre uma rotação de corpo rígido. Estas deformações parasitas podem ser eliminadas através da referida matriz de projecção, que se apresenta de seguida.

Seja $\bar{\mathbf{u}}^p$ o campo de deslocamentos nodais projectado da seguinte forma [9]:

$$\bar{\mathbf{u}}_I^p = \mathbf{P}_I \mathbf{u}_I, \quad (123)$$

onde

$$\mathbf{P}_I = \mathbf{I} - \mathbf{R}_I \left(\mathbf{R}_I^T \mathbf{R}_I \right)^{-1} \mathbf{R}_I^T \quad (124)$$

é a matriz de projecção de corpo rígido para o nó I.

A matriz explícita \mathbf{R}_I toma assim a seguinte forma:

$$\mathbf{R}_I = \begin{bmatrix} 0 & z_I - z_c & -(y_I - y_c) \\ -(z_I - z_c) & 0 & x_I - x_c \\ y_I - y_c & -(x_I - x_c) & 0 \end{bmatrix} \quad (125)$$

onde x_c , y_c e z_c são as coordenadas no centro do elemento.

A projecção para o movimento de corpo rígido é aplicada unicamente à parte constante do tensor das deformações. A matriz constante de deformação-deslocamento é assim transformada da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{B}}_{1I}^0 = \tilde{\mathbf{B}}_{1I}^0 \cdot \mathbf{P}_I \quad (126)$$

A matriz constante de deformação-deslocamento $\hat{\mathbf{B}}_{1I}^0$ é usada em conjunto com as matrizes de deformação-deslocamento lineares na equação (122) para construir a matriz de rigidez e o vector das forças internas, para o elemento quadrangular de integração reduzida.

3.3.3 Elemento Triangular para Estado Plano de tensão

Consideremos o sistema de coordenadas da Figura 3.14. Para cada elemento triangular de três nós, no estado plano de tensão, as coordenadas de um determinado ponto do elemento podem ser obtidas a partir da seguinte interpolação:

$$\mathbf{x} = \sum_{I=1}^3 N_I(\xi, \eta) \bar{\mathbf{x}}_I, \quad (127)$$

onde \bar{x}_i são as coordenadas dos nós e $N_I(\xi, \eta)$ são as funções de forma para um elemento triangular de 3 nós, definidas como:

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi \\ N_2 &= \eta \\ N_3 &= 1 - \xi - \eta \end{aligned} \quad (128)$$

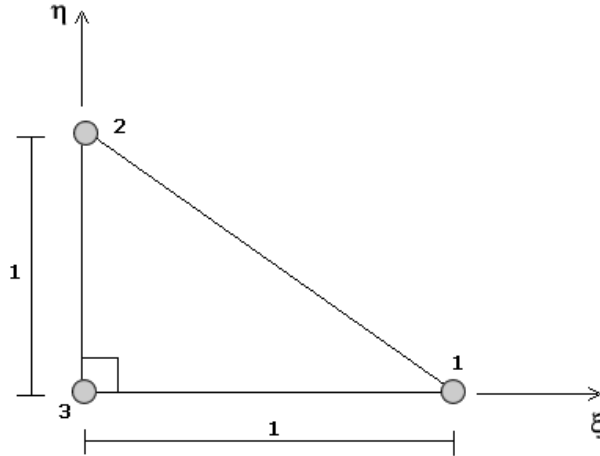


Figura 3.14 – Sistema de coordenadas para o elemento triangular.

Este elemento triangular utiliza apenas um ponto de integração de Gauss. As coordenadas do ponto de integração de Gauss e o respectivo peso são definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1.0}{3.0} \\ \eta_1 &= \frac{1.0}{3.0} \\ W_1 &= 0.5 \end{aligned} \quad (129)$$

A matriz do Jacobiano no ponto de Gauss é dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{I,\xi} \cdot x_I & N_{I,\xi} \cdot y_I & N_{I,\xi} \cdot z_I \\ N_{I,\eta} \cdot x_I & N_{I,\eta} \cdot y_I & N_{I,\eta} \cdot z_I \\ N_{I,\zeta} \cdot x_I & N_{I,\zeta} \cdot y_I & N_{I,\zeta} \cdot z_I \end{bmatrix} \quad (I = 1, 2, 3). \quad (130)$$

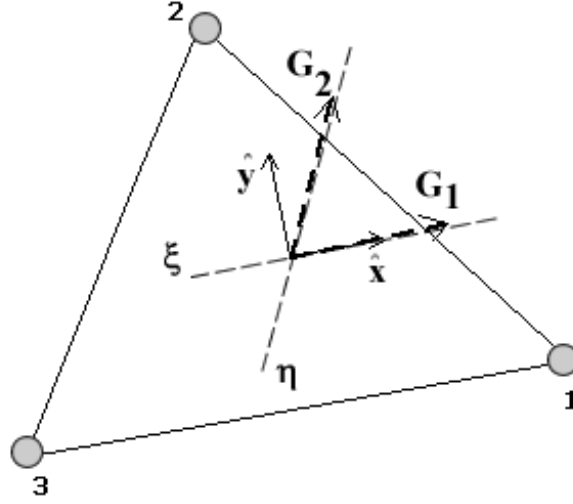


Figura 3.15 – Sistema de coordenadas convectivo para o elemento triangular.

No sistema de coordenadas convectivo \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 e \mathbf{G}_3 da Figura 3.15, o tensor das deformações é representado da seguinte maneira:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{,\xi} \cdot \mathbf{u}_{,\eta} + \mathbf{x}_{,\eta} \cdot \mathbf{u}_{,\xi}). \quad (131)$$

O tensor das deformações pode ser também representado pelo produto da matriz $\bar{\mathbf{B}}$ (matriz deformação-deslocamento) com os deslocamentos nodais, ou seja:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{B}}_I \cdot \mathbf{u}_I, \quad (132)$$

onde a matriz $\bar{\mathbf{B}}$, no referencial convectivo, é obtida através da seguinte expressão:

$$\bar{\mathbf{B}}_I = \begin{bmatrix} N_{I,\xi} \cdot (N_{J,\xi} \cdot x_J) & N_{I,\xi} \cdot (N_{J,\xi} \cdot y_J) & N_{I,\xi} \cdot (N_{J,\xi} \cdot z_J) \\ N_{I,\eta} \cdot (N_{J,\eta} \cdot x_J) & N_{I,\eta} \cdot (N_{J,\eta} \cdot y_J) & N_{I,\eta} \cdot (N_{J,\eta} \cdot z_J) \\ N_{I,\eta} \cdot (N_{J,\xi} \cdot x_J) + N_{I,\xi} \cdot (N_{J,\eta} \cdot x_J) & N_{I,\eta} \cdot (N_{J,\xi} \cdot y_J) + N_{I,\xi} \cdot (N_{J,\eta} \cdot y_J) & N_{I,\eta} \cdot (N_{J,\xi} \cdot z_J) + N_{I,\xi} \cdot (N_{J,\eta} \cdot z_J) \end{bmatrix}, \quad (133)$$

e o vector dos deslocamentos nodais:

$$\mathbf{u}_I = [u_I \quad v_I \quad w_I]^T. \quad (134)$$

A matriz deformação-deslocamento $\bar{\mathbf{B}}$ tem que ser transformada para o referencial local, de modo a poder ser integrada com os modelos constitutivos materiais e assegurar

a objectividade através da descrição num referencial co-rotacional onde os eixos locais rodam juntamente com o elemento [12].

Para se obter a matriz de transformação do referencial convectivo para o referencial local, tem que se obter primeiro a inversa do Jacobiano:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} & \zeta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} & \zeta_{,y} \\ \xi_{,z} & \eta_{,z} & \zeta_{,z} \end{bmatrix}. \quad (135)$$

O sistema de eixos local definido na Figura 3.15 dá origem a uma matriz de rotação que transforma qualquer vector do referencial global para o referencial local. Ela é constituída pelos eixos Cartesianos do sistema de eixos local:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{,x} & \hat{y}_{,x} & \hat{z}_{,x} \\ \hat{x}_{,y} & \hat{y}_{,y} & \hat{z}_{,y} \\ \hat{x}_{,z} & \hat{y}_{,z} & \hat{z}_{,z} \end{bmatrix}. \quad (136)$$

A transformação do referencial isoparamétrico para o referencial local pode então ser obtida através da transformação do sistema isoparamétrico para o sistema global (através da inversa do Jacobiano) seguida da transformação do referencial global para o referencial local a partir da matriz de rotação \mathbf{R} , ou seja:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_{,\hat{x}} & \eta_{,\hat{x}} & \zeta_{,\hat{x}} \\ \xi_{,\hat{y}} & \eta_{,\hat{y}} & \zeta_{,\hat{y}} \\ \xi_{,\hat{z}} & \eta_{,\hat{z}} & \zeta_{,\hat{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{,x} & \hat{x}_{,y} & \hat{x}_{,z} \\ \hat{y}_{,x} & \hat{y}_{,y} & \hat{y}_{,z} \\ \hat{z}_{,x} & \hat{z}_{,y} & \hat{z}_{,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} & \zeta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} & \zeta_{,y} \\ \xi_{,z} & \eta_{,z} & \zeta_{,z} \end{bmatrix}. \quad (137)$$

A matriz de segunda ordem que permite transformar a matriz deformação-deslocamento, $\bar{\mathbf{B}}_I$, do referencial convectivo para o referencial local é finalmente obtida a partir da equação da matriz \mathbf{Q} (116).

A matriz deformação-deslocamento no referencial local, $\hat{\mathbf{B}}_I$, é então transformada a partir da matriz deformação-deslocamento no referencial convectivo, $\bar{\mathbf{B}}_I$, e da matriz de transformação de segunda ordem \mathbf{Q} :

$$\hat{\mathbf{B}}_I = \mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{B}}_I. \quad (138)$$

A matriz de rigidez do elemento triangular é:

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_V \hat{\mathbf{B}}_I^T \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{B}}_J dV ,$$

onde \mathbf{C} é a matriz material constitutiva. O vector de forças internas resulta da seguinte expressão:

$$\mathbf{F}_I = \int_V \hat{\mathbf{B}}_I^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV , \quad (139)$$

onde as tensões $\boldsymbol{\sigma}$ são obtidas a partir da matriz deformação-deslocamento no referencial local e também a partir da matriz constitutiva \mathbf{C} , ou seja:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{B}}_I \cdot \mathbf{u}_I . \quad (140)$$

O elemento triangular descrito neste trabalho, foi implementado de raíz no programa não-linear de elementos finitos CEREBRO© [13], de modo a poder ser utilizado no algoritmo para a obtenção dos factores de intensidade de tensão, a partir do método das forças.

Capítulo 4

Resultados

4 Resultados

O método de De Morais [19] mostrou ser muito eficaz na extracção dos factores de intensidade de tensão em diversos problemas de relevante aplicação prática. No presente estudo, pretendeu-se estender o método de De Morais para situações com malhas arbitrárias, de modo a que o referido método pudesse ser utilizado em qualquer tipo de geometrias/malhas, sem haver necessidade da imposição de condições de fronteira de simetria, de modo a obter as forças nodais como forças externas de reacção. Assim, os resultados apresentados neste trabalho têm como objectivo principal a demonstração da eficiência do novo algoritmo proposto em diversas malhas de elementos finitos, mostrando a convergência dos resultados para os modos I e II de deformação na mecânica da fractura linear elástica.

O novo método das forças foi aplicado a uma placa com uma fenda, conforme ilustrado na Figura 4.1. A placa apresenta as dimensões: $H = W = 200$ mm e $2a = 10$ mm. As propriedades do material usadas foram $E = 70$ GPa e $\nu = 0.3$ para o módulo de Young e coeficiente de Poisson, respectivamente. As soluções analíticas para os factores de intensidade de tensão são dadas por [19]:

$$K_I = \sigma_R (\pi a)^{1/2} \quad (141)$$

$$K_{II} = \tau_R (\pi a)^{1/2} \quad (142)$$

onde σ_R e τ_R são as tensões normal e de corte, respectivamente, determinadas num ponto da placa afastado do local da fenda.

Após serem obtidos os valores das tensões de referência (através do método dos elementos finitos), σ_R e τ_R , obtêm-se os valores de K_I e K_{II} , a partir das equações (141) e (142). Estes resultados são comparados com os valores de K_I e K_{II} obtidos a partir da

extrapolação das aproximações lineares de K_I versus x_c e K_{II} versus x_c , para $x_c = 0$, ou seja, na ponta da fenda.

Um aspecto importante da utilização do método das forças diz respeito à definição do comprimento característico x_c para a realização do somatório das forças internas dos elementos triangulares. Seguindo a metodologia de De Moraes [19] e considerando que os factores de intensidade de tensão têm representatividade apenas numa área bastante limitada na vizinhança da ponta da fenda [19], considerou-se assim neste trabalho um comprimento característico $x_c = 3\text{ mm}$.

Os modelos de elementos finitos foram construídos no programa GID [24]. De modo a se poder aferir a precisão do método das forças, nomeadamente estudar a sua sensibilidade/convergência na utilização de malhas regulares e também em malhas gerais arbitrárias, foram estudados diversos modelos de malhas de elementos finitos e comparados os resultados numéricos obtidos na extracção dos factores de intensidade de tensão para os modos I e II de deformação na mecânica da fractura linear elástica.

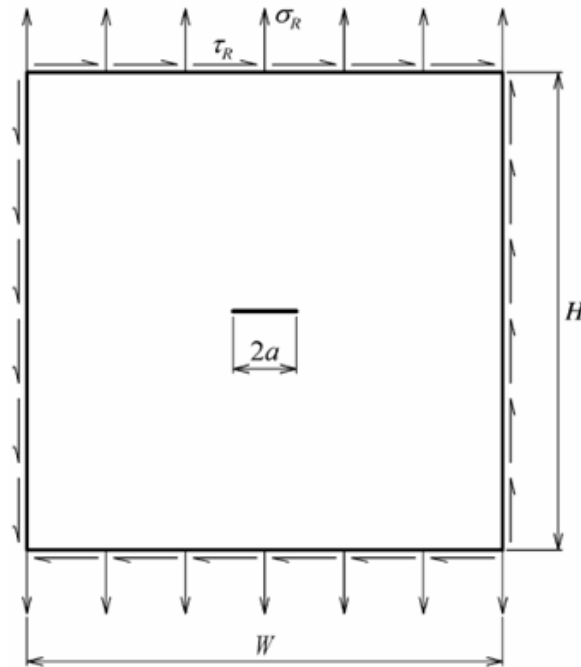


Figura 4.1 – Placa com uma fenda central.

4.1 Placa rectangular com fenda central

4.1.1 Análise de K_I para $\frac{1}{4}$ da placa (malha regular)

Na Figura 4.2, podem-se observar as condições de fronteira utilizadas. Apenas $\frac{1}{4}$ da malha foi analisado, tendo-se aplicado condições de simetria, restringindo-se assim os deslocamentos dos nós da placa, de acordo com a Figura 4.2. A placa está fixa em baixo, só podendo mover-se segundo x , e está fixa do lado esquerdo, podendo mover-se apenas segundo y . O deslocamento prescrito é aplicado aos nós superiores, segundo y , com um valor de 1.0 mm.

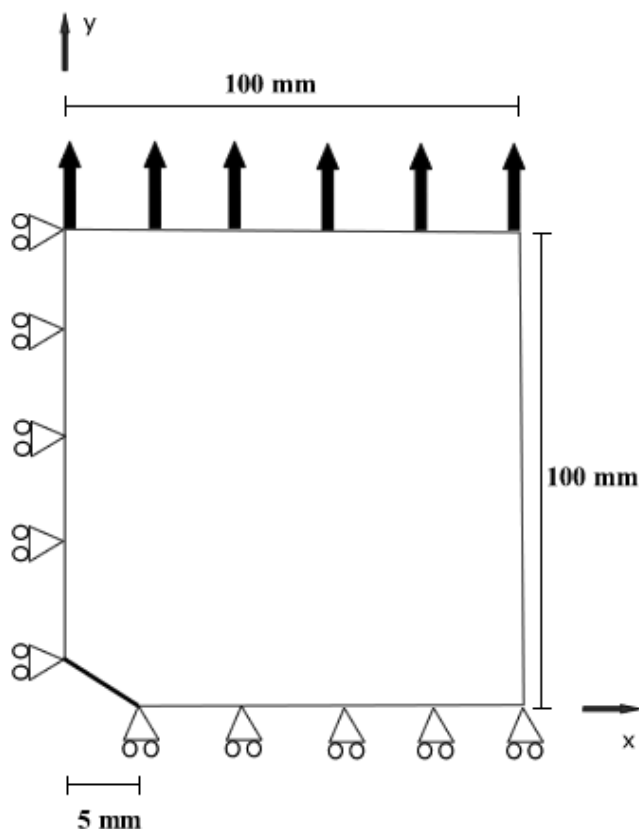


Figura 4.2 – Condições Fronteira e Deslocamento prescrito, para o exemplo 4.1.1.

A Figura 4.3 mostra a malha de elementos finitos estruturada usada neste exemplo, correspondente a $\frac{1}{4}$ da malha da placa e usando condições fronteira de simetria. Foram usados dois tipos de refinamento: comprimento do elemento 0.2 mm e 0.05 mm, numa distância característica de 3mm da ponta da fenda (Figura 4.4). Neste exemplo, as forças

internas para os nós dos elementos finitos situados no eixo local x da ponta da fenda poderiam ser substituídos pelas reacções nodais obtidas pela aplicação das condições de simetria na placa. No entanto, o algoritmo proposto neste trabalho foi aplicado neste exemplo de modo a se verificar a reprodução dos resultados originais de De Moraes [19].

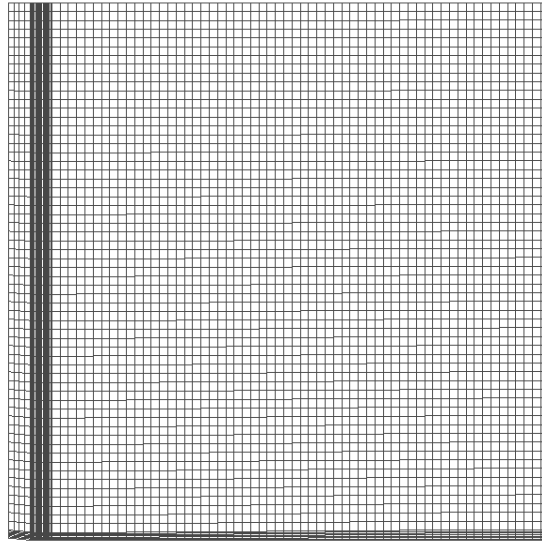


Figura 4.3 – Modelo de elementos finitos sob as configurações de deformação, correspondente a $\frac{1}{4}$ da placa.

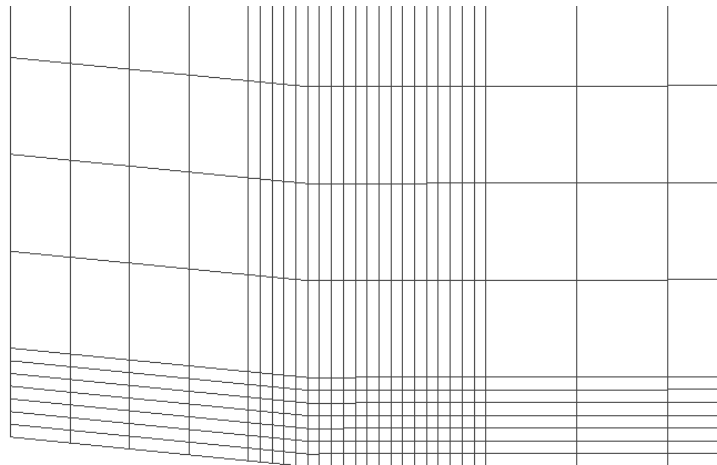


Figura 4.4 – Pormenor da zona perto da ponta da fenda da malha de elementos finitos.

Os valores normalizados obtidos para K_I , para a malha com comprimento médio dos elementos de 0.05 mm, estão representados na Figura 4.5. Estes valores normalizados correspondem à divisão dos valores obtidos pelo valor teórico dado pela equação (141). A solução obtida com o algoritmo proposto foi o resultado de: em primeiro lugar a aplicação de uma regressão linear aos valores de K_I no comprimento característico x_c ; depois procedeu-se à extrapolação do valor de K_I para a ponta da fenda, ou seja, $x_c = 0$. Pode-se observar no gráfico, que o valor obtido está muito próximo de 1, sendo o valor de $K_I = 1.0029$.

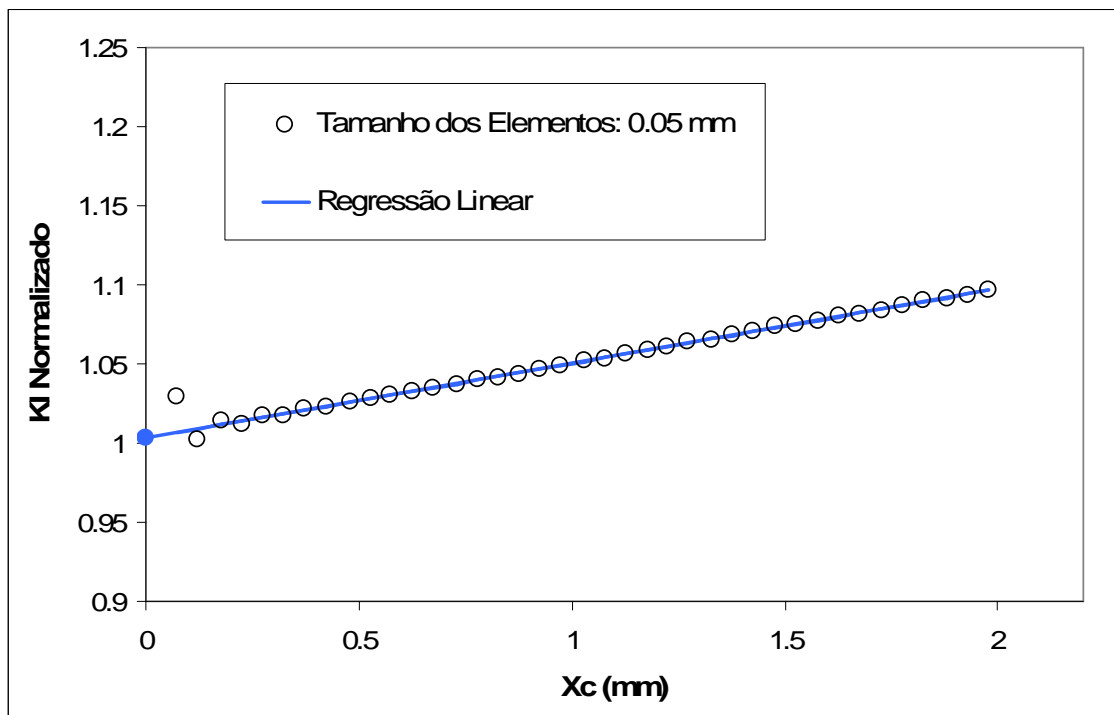


Figura 4.5 – Estimativa do factor de intensidade de tensão K_I , para a malha 0.05 mm.

Convém referir que, apesar de alguns valores dos factores de intensidade de tensão (K_I neste caso) na vizinhança imediata da ponta da fenda se afastarem consideravelmente da aproximação linear (ver por exemplo o primeiro valor de K_I na Figura 4.5), eles são no entanto fundamentais para a correcta definição dos restantes valores de K_I do gráfico da Figura 4.5, uma vez que esses valores são incluídos no somatório das forças internas da equação (97) que permite obter os factores de intensidade de tensão. Assim, apesar de se efectuar uma aproximação linear aos valores dos factores de intensidade de tensão,

todas as forças internas (incluindo as forças internas que actuam na vizinhança imediata da ponta da fenda) intervêm no cálculo dos factores de intensidade de tensão.

Para o caso da malha com tamanho dos elementos de 0.2 mm, os resultados obtidos para K_I estão representados na Figura 4.6. Após fazer-se a regressão linear e extrapolação para $x_c = 0$, obtém-se o valor de $K_I = 1.037$.

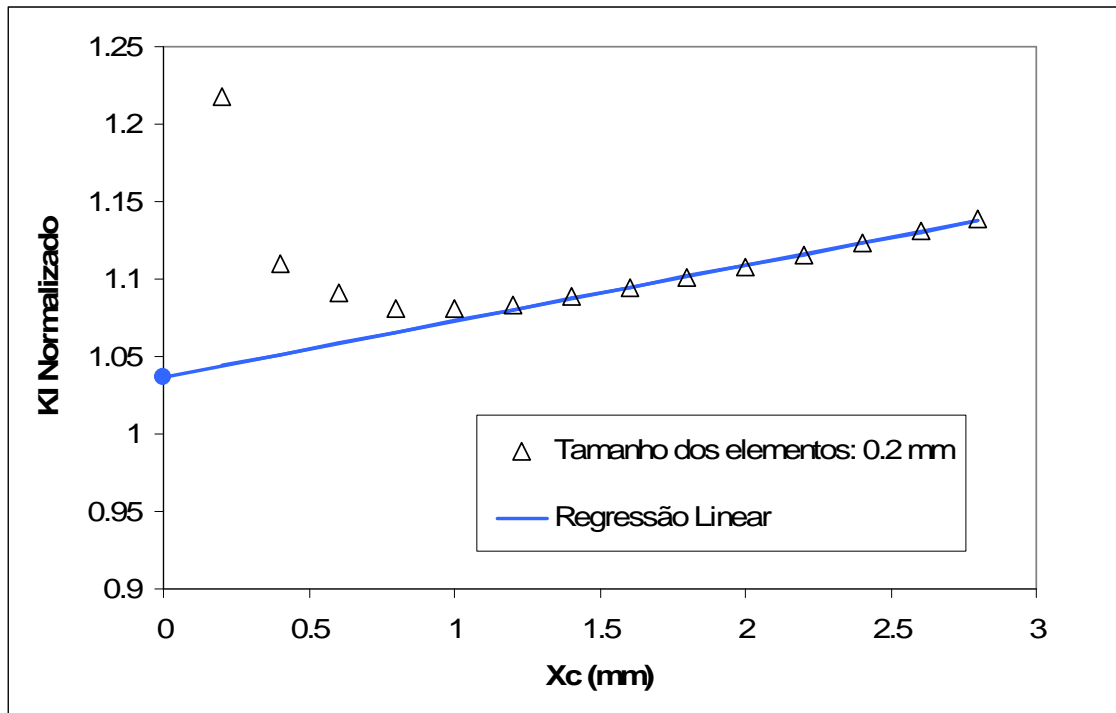


Figura 4.6 – Estimativa do factor de intensidade de tensão K_I , para a malha 0.2 mm.

Os erros obtidos são de 0.29%, para a malha de 0.05 mm e de 3.7%, para a malha de 0.2 mm.

Os resultados obtidos com a aplicação do algoritmo proposto neste trabalho estão em perfeita sintonia com os resultados apresentados por De Moraes [19], mostrando assim a correcta implementação do método.

4.1.2 Análise de K_I para $\frac{1}{2}$ da placa (malha regular)

Na Figura 4.7, podem-se observar as condições fronteira e o deslocamento prescrito aplicados, no segundo exemplo. A placa está também fixa em baixo e do lado esquerdo. O deslocamento prescrito é aplicado aos nós superiores, segundo y , com um valor de 1.0 mm.

O objectivo principal deste exemplo é o de utilizar uma malha completa ao longo do eixo local do sistema de eixos situado na ponta da fenda.

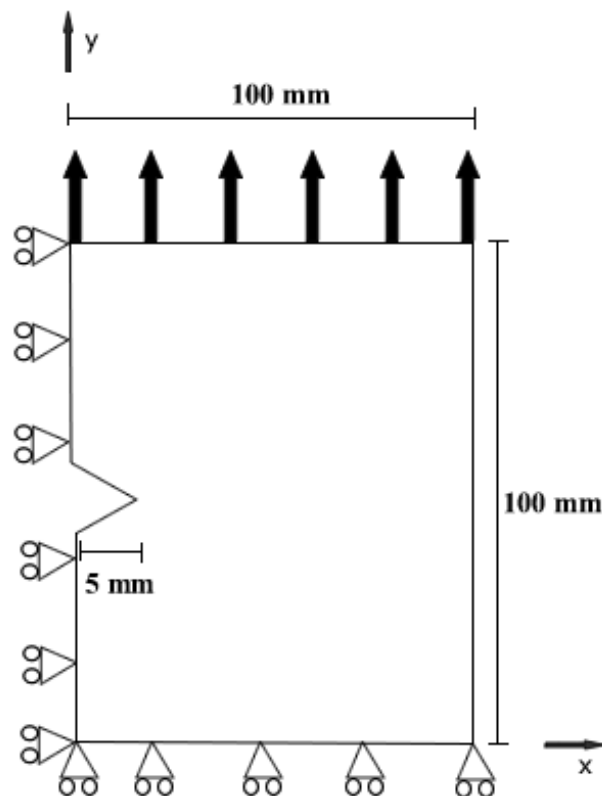


Figura 4.7 – Condições Fronteira e Deslocamento, prescrito para o exemplo 4.1.2.

Foi usada uma malha estruturada regular correspondente a $\frac{1}{2}$ da placa, com dois tipos de refinamento: comprimento do elemento 0.05 mm e 0.1 mm, a uma distância de 3mm da ponta da fenda (Figura 4.9 e Figura 4.10). Neste caso, não se podem utilizar as reacções nodais, pois não existem condições de fronteira nos nós dos elementos finitos situados ao longo do eixo local x da ponta da fenda. Assim, torna-se obrigatória a

aplicação do algoritmo de subdivisão dos quadriláteros em elementos triangulares para a aplicação do método das forças.

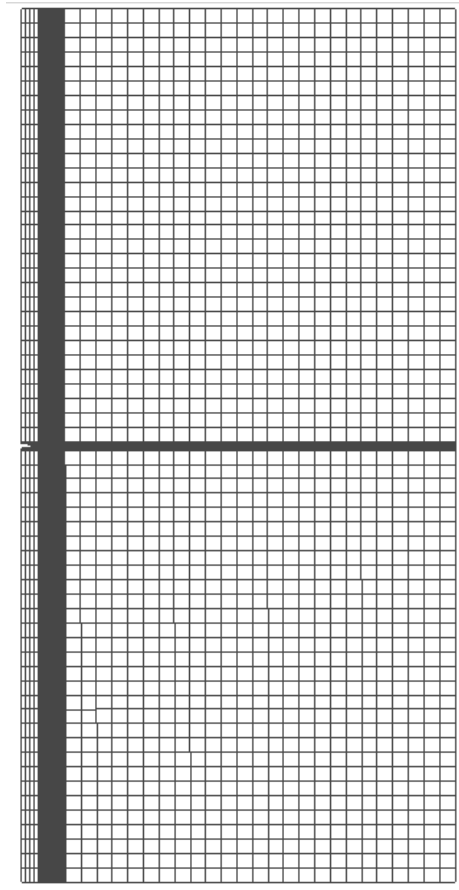


Figura 4.8 – Malha de elementos finitos, correspondente a $\frac{1}{2}$ do modelo total da placa.

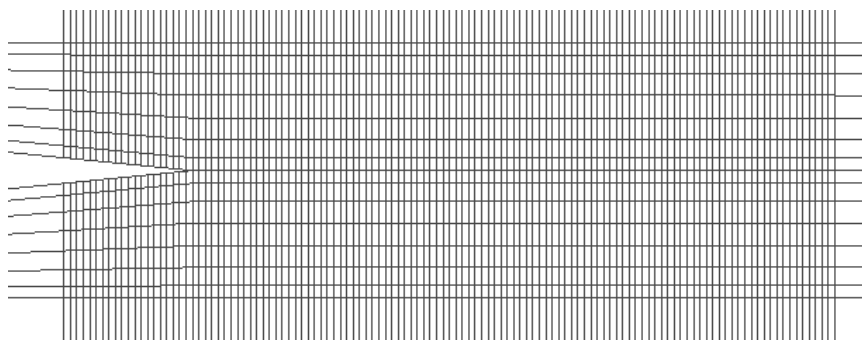


Figura 4.9 – Zoom pormenorizado da zona perto da ponta da fenda, para o caso de comprimentos dos elementos 0.05 mm.

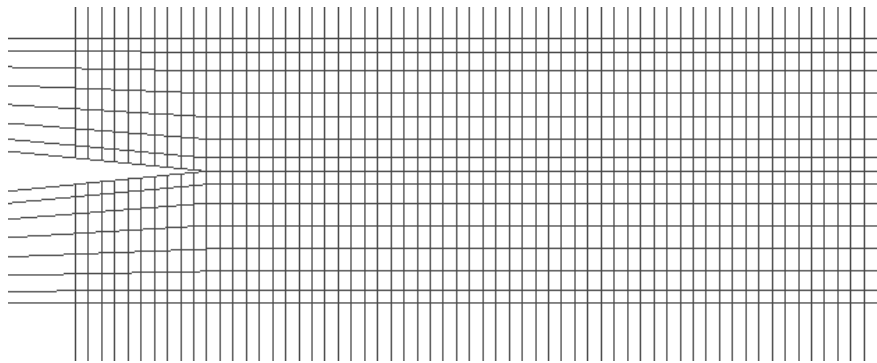


Figura 4.10 – Zoom pormenorizado da zona perto da ponta da fenda, para o caso de comprimentos dos elementos 0.1 mm.

Os valores normalizados obtidos para K_I , para a malha 0.05 mm, estão representados na Figura 4.11. Fazendo a regressão linear e a extrapolação para $x_c = 0$, obtém-se $K_I = 1.0026$. O erro correspondente a esta aproximação é de 0.26%.

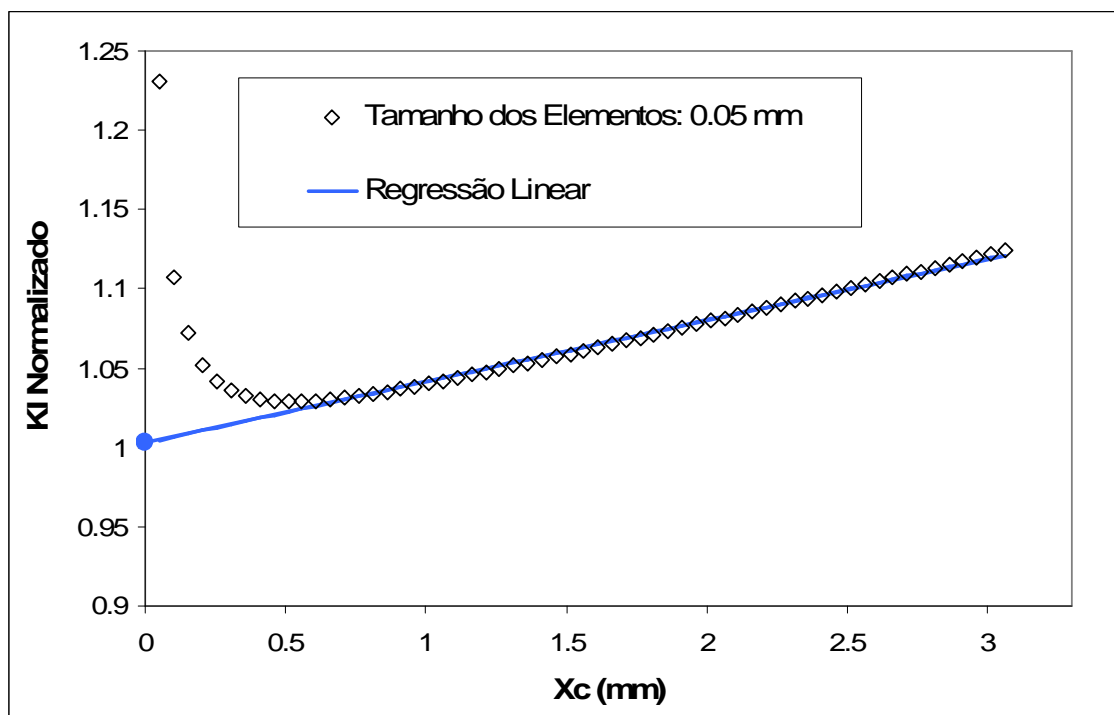


Figura 4.11 – Estimativa do factor de intensidade de tensão K_I , para a malha 0.05 mm.

Para a malha com comprimento dos elementos 0.1 mm, fez-se também uma regressão linear dos valores obtidos e uma extrapolação para $x_c = 0$.

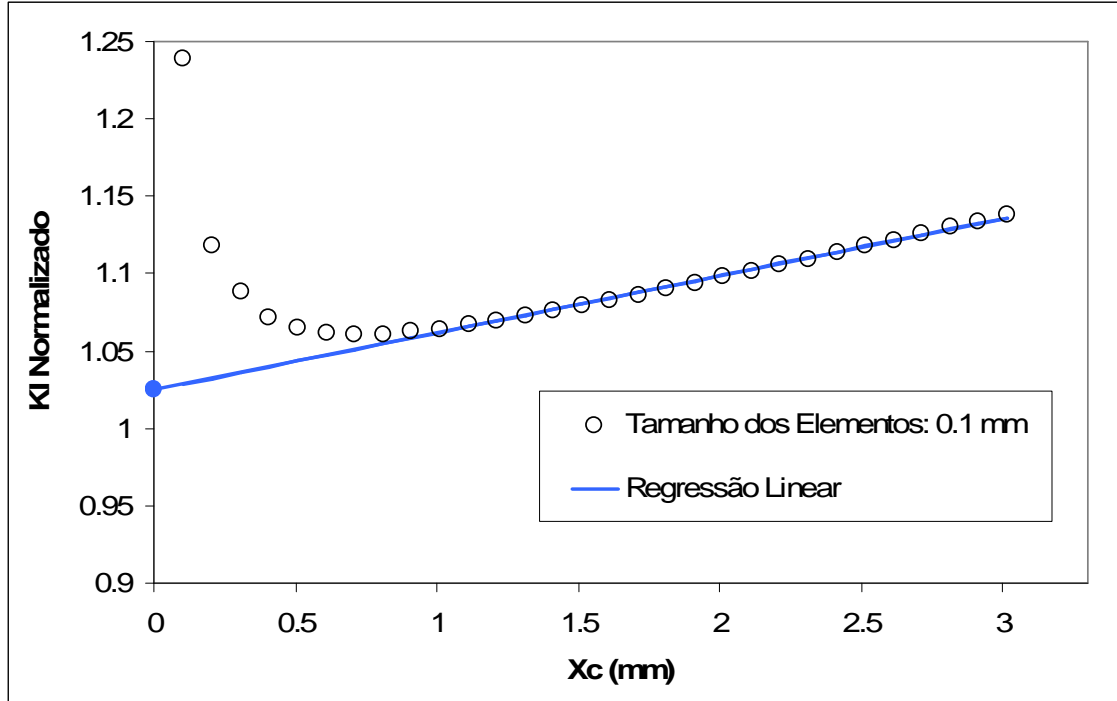


Figura 4.12 – Estimativa do factor de intensidade de tensão K_I , para a malha 0.1 mm.

O valor obtido foi $K_I = 1.0247$ (Figura 4.12). Assim, o erro é de 2.47%.

4.1.3 Análise de K_I para $\frac{1}{2}$ da placa (malha irregular)

Neste caso o método foi aplicado a uma malha não estruturada, Figura 4.13, com dois tipos de refinamento: comprimento médio do elemento 0.05 mm e 0.08 mm, novamente a uma distância de 3mm da ponta da fenda (Figura 4.14 e Figura 4.15). As condições de fronteira aplicadas foram as mesmas do exemplo anterior, ou seja, deslocamento prescrito segundo y, com valor de 1.0 mm e condição de simetria segundo x, para $\frac{1}{2}$ da placa.

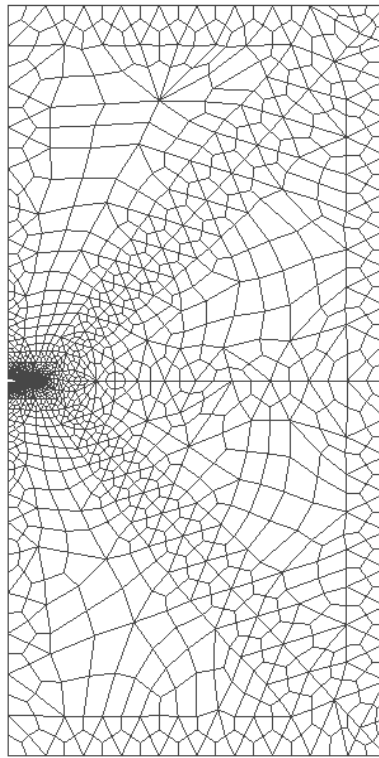


Figura 4.13 – Malha de elementos finitos não estruturada, correspondente a $\frac{1}{2}$ do modelo total da placa.

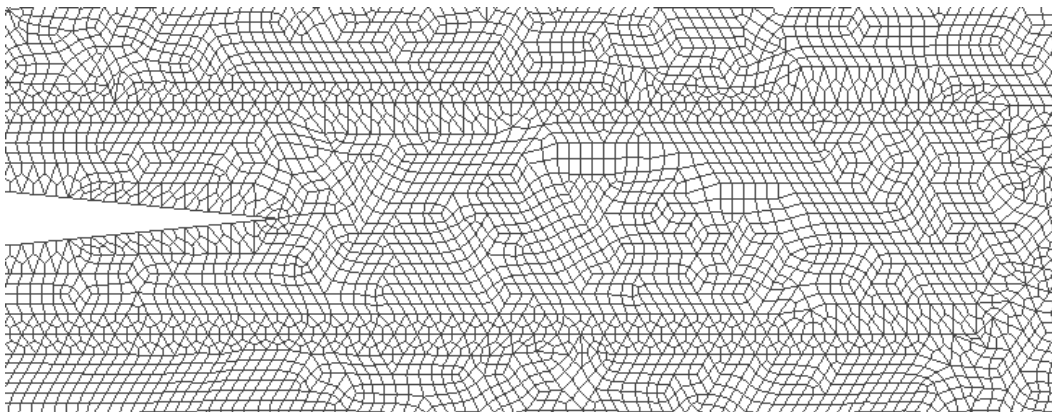


Figura 4.14 – Zoom pormenorizado da zona perto da ponta da fenda, para o caso de comprimentos dos elementos 0.05 mm.

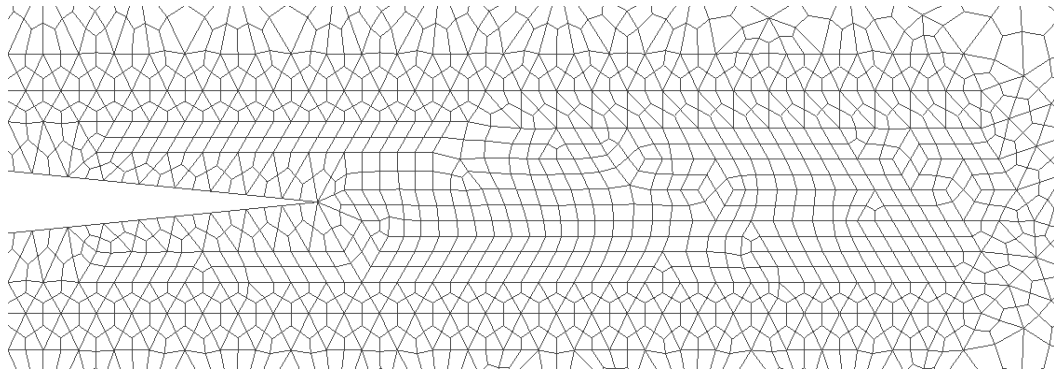


Figura 4.15 – Zoom pormenorizado da zona perto da ponta da fenda, para o caso de comprimentos dos elementos 0.08 mm.

Para a malha com comprimento dos elementos 0.05 mm, os valores normalizados obtidos para K_I estão representados na Figura 4.16. Fazendo a regressão linear dos valores obtidos e uma extrapolação para $x_c = 0$, obtém-se $K_I = 0.979$. No caso da malha 0.08 mm, obtém-se o valor de $K_I = 1.0433$ (Figura 4.17). Logo, os erros são de 2.1% para a malha de 0.05 mm e 4.33% para a malha de 0.08 mm.

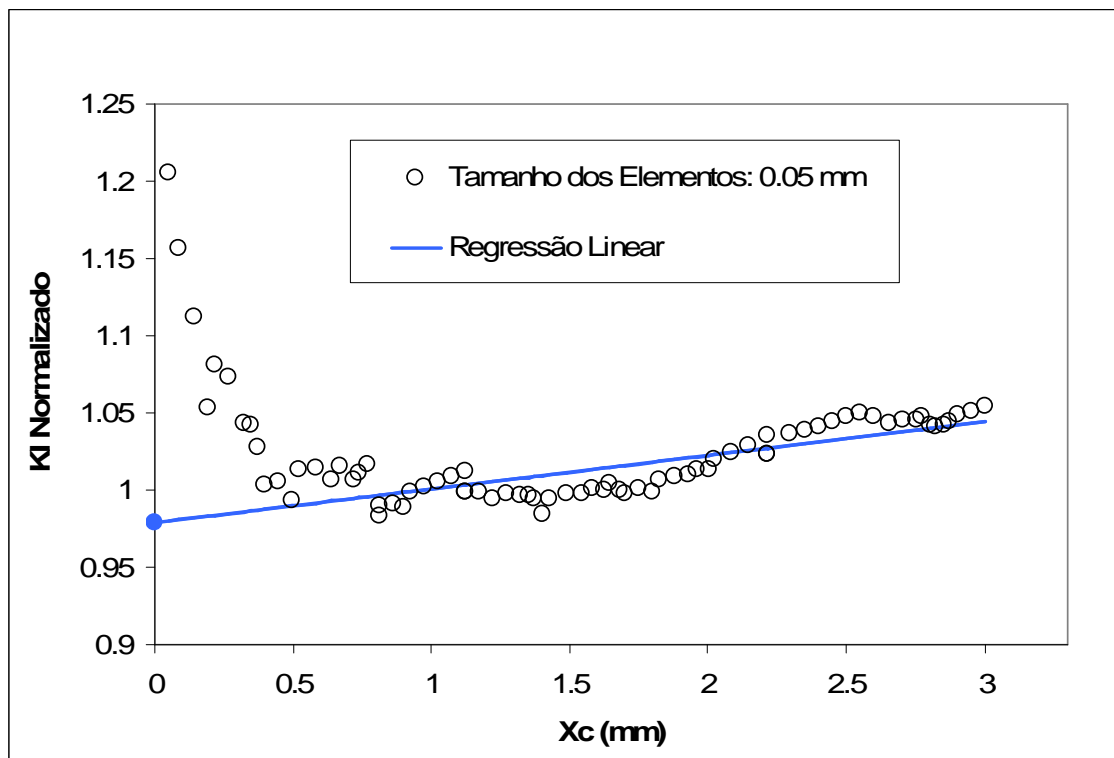


Figura 4.16 – Estimativa do factor de intensidade de tensão K_I , para a malha 0.05 mm.

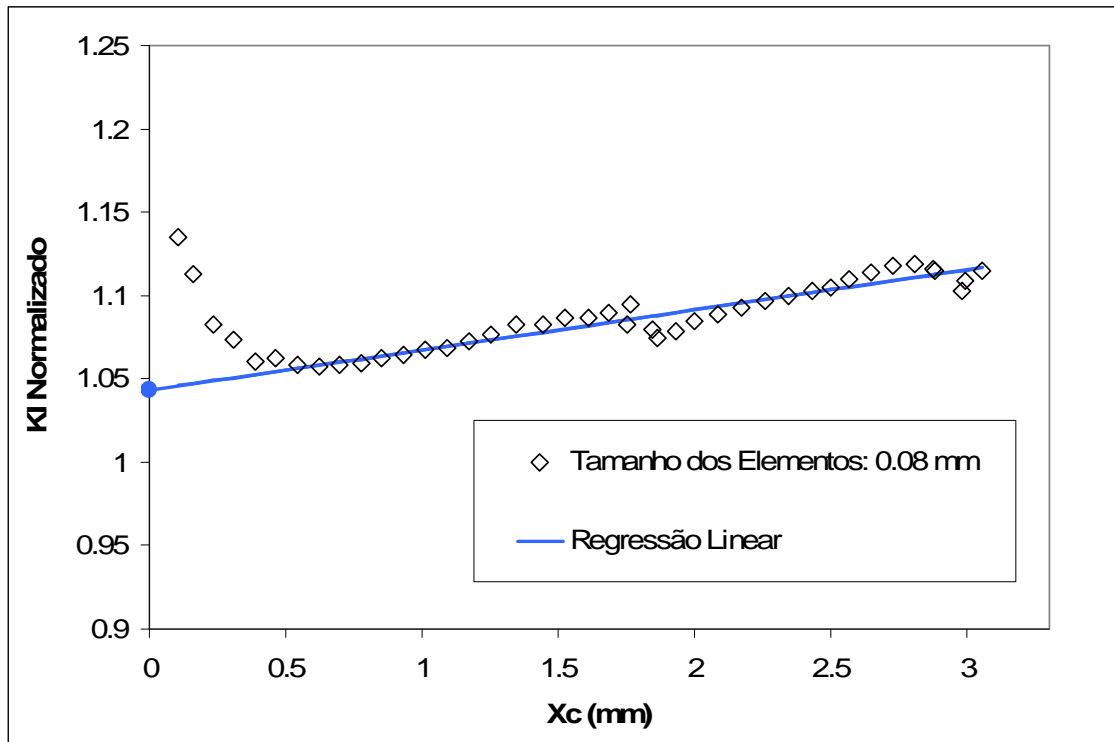


Figura 4.17 – Estimativa do factor de intensidade de tensão K_I , para a malha 0.08 mm.

Pode-se verificar nos gráficos das Figuras 4.16 e 4.17 que os resultados obtidos para os valores normalizados de K_I são um pouco mais irregulares do que os resultados obtidos para as malhas estruturadas dos exemplos anteriores. Esta irregularidade deve-se essencialmente ao desvio na precisão dos resultados dos elementos finitos quando são utilizados em malhas distorcidas. No entanto, pode-se constatar uma tendência nitidamente linear para a aproximação do factor de intensidade de tensão, K_I , para $x_c = 0$.

4.1.4 Análise de K_{II} (malha regular)

Para a análise do K_{II} , foi usada uma malha de elementos finitos estruturada (Figura 4.18). Os elementos na vizinhança da ponta da fenda (3 mm) têm um comprimento de 0.2 mm.

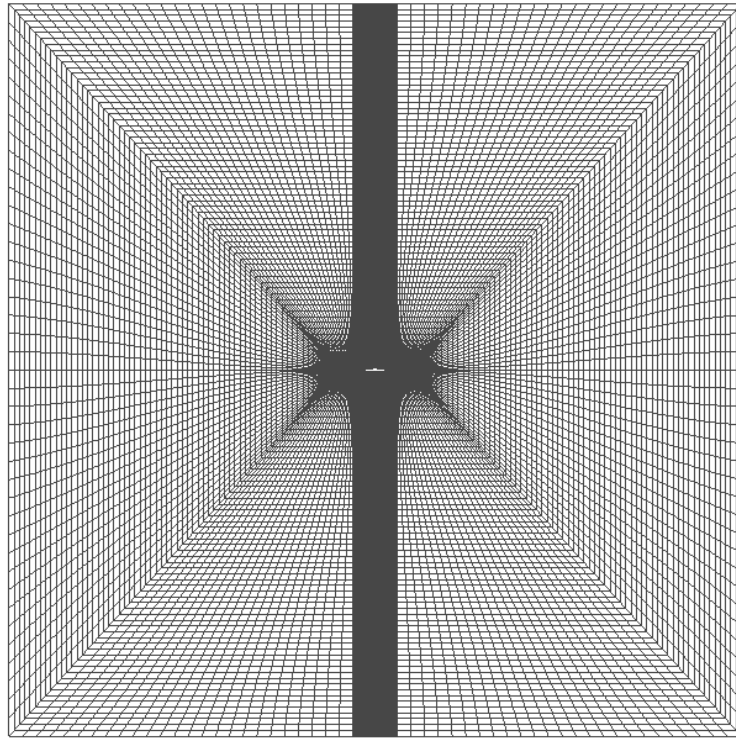


Figura 4.18 - Malha de elementos finitos, para o cálculo de K_{II} .

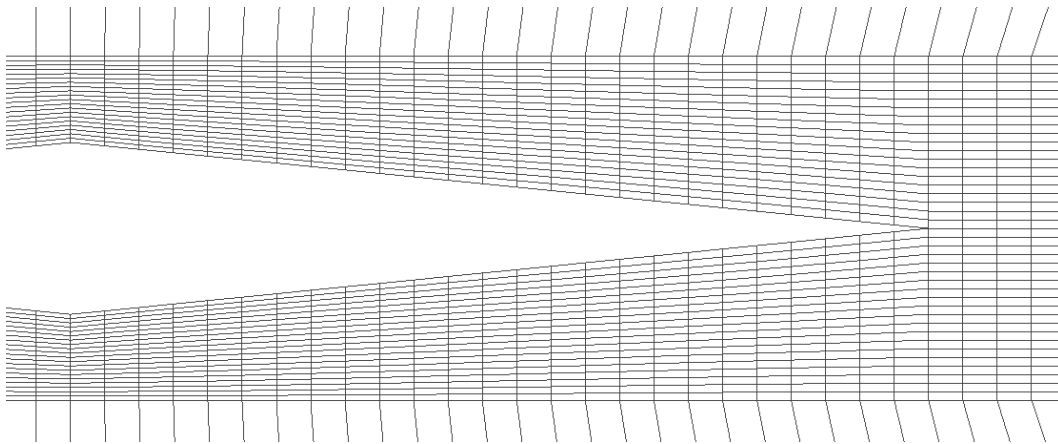


Figura 4.19 - Zoom pormenorizado da zona perto da ponta da fenda.

Na Figura 4.20, podem-se observar as condições fronteira e o deslocamento prescrito aplicados. Neste exemplo, não se podem utilizar condições de simetria, pois o carregamento utilizado não é simétrico. Assim, foi utilizado um deslocamento prescrito de 1 mm, segundo x e y, de modo a reproduzir um estado de tensão de corte puro.

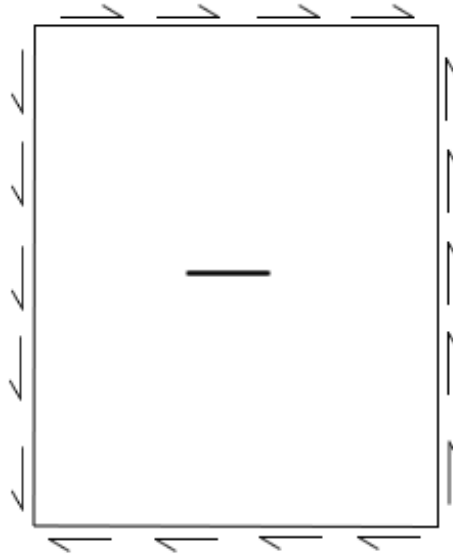


Figura 4.20 – Condições Fronteira e Deslocamento prescrito, para o exemplo 4.1.4 do cálculo de K_{II} .

Na Figura 4.21 estão representados os valores normalizados obtidos para K_{II} . Fazendo uma aproximação linear dos valores obtidos e uma extrapolação para $x_c = 0$, obtém-se $K_I = 1.0282$, onde o erro da aproximação é de 2.82%.

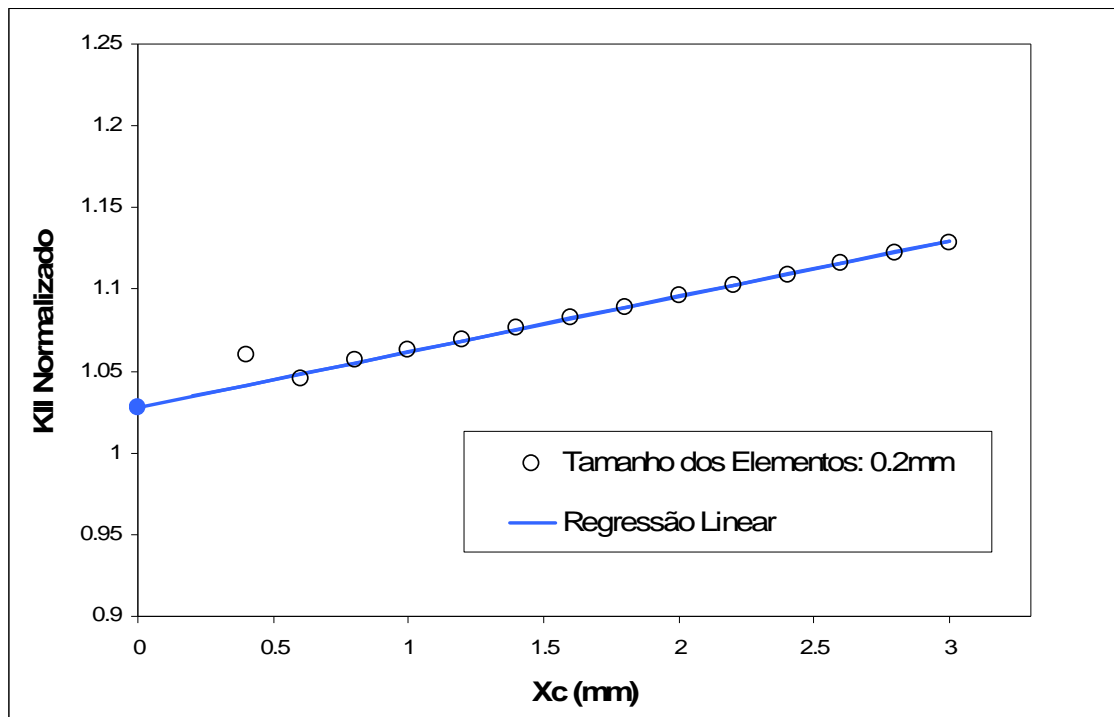


Figura 4.21 – Estimativa do factor de intensidade de tensão K_{II} , para o exemplo 4.1.4.

4.1.5 Análise de K_{II} (malha irregular)

Neste exemplo foi usada uma malha de elementos finitos não estruturada, sendo o comprimento médio dos elementos perto da ponta da fenda de 0.2 mm (Figura 4.22 e Figura 4.23). As condições fronteira e o deslocamento prescrito aplicados são os mesmos que do exemplo 4.1.4.

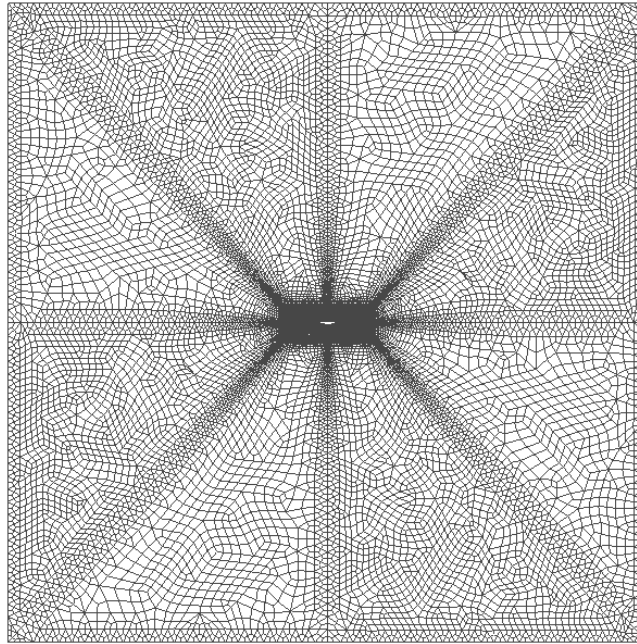


Figura 4.22 - Malha de elementos finitos, para o cálculo de K_{II} .

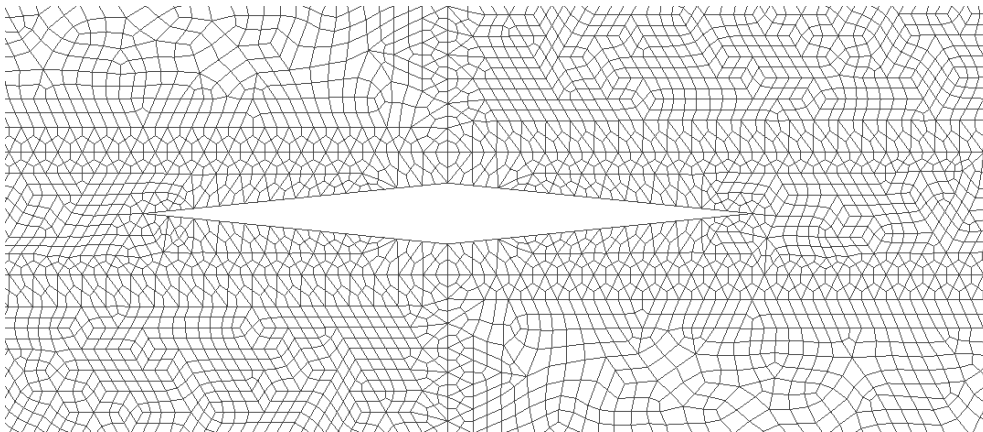


Figura 4.23 - Zoom pormenorizado da zona perto da ponta da fenda, para o exemplo 4.1.5 do cálculo de K_{II} .

Na Figura 4.24 estão representados os valores normalizados obtidos para K_{II} , para a malha não estruturada. Fazendo uma aproximação linear dos valores obtidos e uma extrapolação para $x_c = 0$, obtém-se $K_I = 1.0254$, onde o erro da aproximação é de 2.54%.

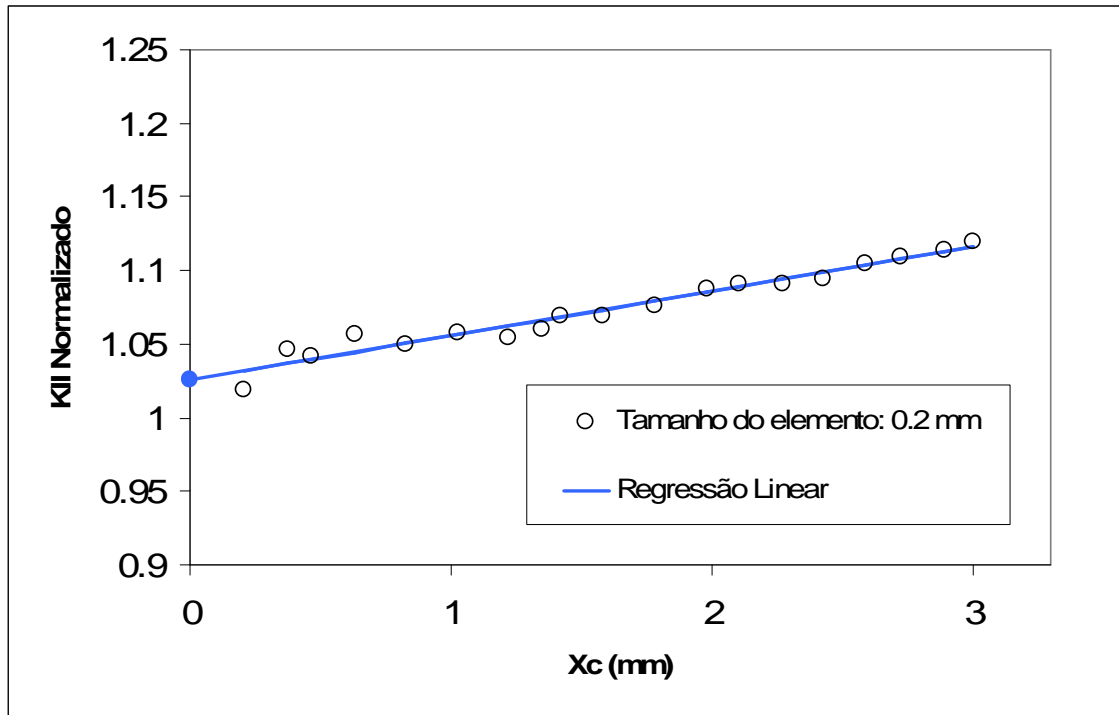


Figura 4.24 – Estimativa do factor de intensidade de tensão K_{II} , para o exemplo 4.1.5.

Os resultados normalizados de K_{II} obtidos são um pouco mais irregulares que os resultados obtidos para a malha estruturada, à semelhança do que aconteceu para o cálculo de K_I .

Capítulo 5

Conclusões

5 Conclusões

Neste trabalho foi feita uma adaptação do método das forças de De Morais [19] a problemas que envolvem malhas de elementos finitos arbitrárias, de forma a calcular os factores de intensidade de tensão, para os modos I e II da mecânica da fractura linear elástica. No método proposto por De Morais [19], os factores de intensidade de tensão são calculados a partir de um somatório das forças internas nos nós dos elementos finitos. Em malhas gerais e em condições de equilíbrio, essas forças internas são nulas, logo não se pode aplicar o método de De Morais. A aplicabilidade do método de De Morais resume-se assim a situações onde se podem aplicar condições de simetria e assim extrair as reacções nodais nos nós ao longo do eixo local x , de modo a se obter as forças nodais que entram no cálculo dos factores de intensidade de tensão.

Neste novo método, foi criado um algoritmo alternativo para malhas arbitrárias de elementos finitos, de forma a colmatar este problema. Os elementos quadrangulares com um ponto de integração, atravessados pelo eixo horizontal na ponta da fenda, são transformados em triângulos. Logo, as forças internas para obter os factores de intensidade de tensão, são obtidas pela assemblagem das forças internas dos triângulos.

O algoritmo proposto para determinar os factores de intensidade de tensão, foi aplicado em várias malhas de elementos finitos, estruturadas e não estruturadas, com diferentes níveis de refinamento. O algoritmo é robusto e adapta-se facilmente a qualquer sistema de geração de malhas. Deste modo, pode ser usado em qualquer análise de fractura mecânica linear elástica, incluindo propagação arbitrária de fendas.

Os resultados obtidos para os factores de intensidade de tensão são dependentes dos pontos escolhidos, para calcular as forças internas, na vizinhança da ponta da fenda. A distância escolhida neste caso foi de 3mm, visto numa zona mais distante da fenda, os

factores de intensidade de tensão não terem significado [19]. É ainda necessário que a malha de elementos finitos, na vizinhança da ponta da fenda, seja significativamente refinada, de modo a obter resultados válidos.

Os erros obtidos para os factores de intensidade de tensão, tanto para as malhas regulares como irregulares, para os modos I e II, são aceitáveis. Desta forma, as vantagens deste novo método são a possibilidade de calcular simultaneamente os dois factores de intensidade de tensão, K_I e K_{II} e poder ser aplicado a malhas de elementos finitos gerais e arbitrárias.

Bibliografia

- [1] ABAQUS User's Manual v. 6.3, Hibbit, Karlsson and Sorensen, Inc, 2002.
- [2] Alashoaibi A.M., Arifin Ahmad K., *Finite element simulation of stress intensity factors in elastic-plastic crack growth*, J. Zhejiang Univ SCIENCE A 7(8):1336-1342, 2006.
- [3] Anderson T.L., *Fracture mechanics: fundamentals and applications*, CRC Press, Inc., Florida, 1991.
- [4] Barsoum R.S., *Application of quadratic isoperimetric finite elements in liner fracture mechanics*, Int.J.Fract., vol 10, pp. 603-605, 1974.
- [5] Barsoum R.S., *On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics*, Int J Num Meth Engng, 10, 25-37, 1976.
- [6] Barsoum R.S., *Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements*, Int J Num Meth Engng, 11, 85-98, 1977.
- [7] Belytschko T., Black T., *Elastic Crack Growth in Finite Elements With Minimal Remeshing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 45, Number 5, pp. 601-620 , 1999.
- [8] Belytschko T., Leviathan I., *Physical stabilization of the 4-node shell element with one point quadrature*. Comput Meth Appl Mech Eng 113:321-350, 1994.
- [9] Belytschko T., Leviathan I., *Projections schemes for one-point quadrature shell elements*. Comput Meth Appl Mech Eng 115:277, 1994.
- [10] Broek D., *Elementary engineering fracture mechanics*, 4th Edition, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.

- [11] Brocks W., Scheider I., *Reliable J-values, Numerical Aspects of the Path-Dependence of the J-Integral in Incremental Plasticity*, WMS0108, 2003.
- [12] Cardoso R., *Desenvolvimento de elementos de casca de integração reduzida com modelos materiais anisotrópicos para processos de conformação plástica de chapa*, Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, 2002.
- [13] Cardoso R., CEREBRO – *Finite Element Analysis Software*, License ASSOFT N° 1169/d/04, 2004.
- [14] Cardoso R., Yoon J., Grácio J., Barlat F., César de Sá J., *Development of a one point quadrature shell element for nonlinear applications with contact and anisotropy*. Comput Meth Eng 191:5177, 2002.
- [15] Cardoso R., Yoon J., Valente R., *A new approach to reduce membrane and transverse shear locking for one point quadrature shell elements: linear formulation*. Int J Numer Meth Eng 66:214-249, 2006.
- [16] Cardoso R., Yoon J., *One point quadrature shell elements: a study on convergence and patch tests*. Comput Mech 40:871-88, 2007.
- [17] Chan S.K., Tuba I.S. and Wilson W.K., *On the finite element method in linear fracture mechanics*, Engineering Fracture Mechanics 2, pp. 1–17, 1970.
- [18] Cherepanov C., *Crack propagation in continuous media*, Appl. Math. Mech. 31:476-488, 1967
- [19] De Morais A., *Calculation of stress intensity factors by the force method*, Engineering Fracture Mechanics, vol. 74, 739-750, 2007.
- [20] Dettman J. W., *Applied Complex Variable*,. New York, The Macmillan Company, 1965.

-
- [21] Dolbow J., Moës N., Belytschko T., *Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method*, Finite Elem. Anal. Design, 26, 235-260, 2000.
- [22] Dvorkin E., Bathe K., *A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis*. Eng Comput 1:77, 1984.
- [23] Fleming M., Chu Y., Moran B., Belytschko T., *Enriched element-free Galerkin methods for singular fields*, Int. J. Numer. Methods Eng. 40, 1483-1504, 1997.
- [24] GID, The personal pre and post processor, International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, Spain.
- [25] Gray L.J., Phan A.V., *Improved quarter point crack tip element Engineering fracture Mechanics*, vol. 70, pp. 269-283, 2003.
- [26] Griffith A., *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, vol.221, 163-198, 1921.
- [27] Griffith A., *The Theory of Rupture*, Proc. First Int. Cong. Applied Mech., DELFT, 1924.
- [28] Hellen T. K., *A novel approach to crack-tip singularity solutions*, Computers & Structures, vol. 22, 5, pp. 743-747, 1986.
- [29] Henshell R.D., Shaw K. G., *Crack Tip Finite Elements are Unnecessary*, Int. J. Numer. Methods Eng., 9, 495-507, 1975.
- [30] Hertzberg R., *Deformation and fracture mechanics of engineering materials*, John Wiley & Sons, 1976.
- [31] Hutchinson J.W., *Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material*, J. Mech. Phys. Solids 16, 13-31, 1968.

- [32] Inglis C., *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners*, Trans. Int. Naval Architects, 55 pp. 219-241, 1913.
- [33] Irwin G., *Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate*, Journal of Applied Mechanics, ASME, vol. 79, pp. 361-364, 1957.
- [34] Irwin G., *Fracture*, Handbuch der Physik VI, pp. 551-590, Ed. Springer, 1958.
- [35] Knott J., *Fundamentals of fracture mechanics*, Butterworths, 1976.
- [36] Moës N., Dolbow N., Belytschko T., *A finite element method for crack growth without remeshing*, Int. J. Numer. Methods Eng., 46, 131-150, 1999.
- [37] Nikishkov G.P., Atluri S.N., *Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack by the equivalent domain integral method*, Int. J. Numer. Methods Eng., 24, 1801-1821, 1987.
- [38] Owen D.R.J., Fawkes A.J., *Engineering fracture mechanics: numerical methods and applications*, Pineridge Press, Swansea, UK, 1983.
- [39] Orowan E., *Fracture and strength of solids*, Rep. Prog. Phys. 12, 185, 1949.
- [40] Orowan E., *Energy criteria of fracture*, Weld. J. Res. Suppl. 20, 157s, 1955.
- [41] Raju I.S., *Calculation of strain-energy release rates with higher order and singular finite elements*, Engineering Fracture Mechanics, 28, 251-274, 1987.
- [42] Rice J., *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*, Journal of Applied Mechanics, June, 1968.
- [43] Rice J.R., Rosengreen G.F., *Plane strain deformation near a crack-tip in a power-law hardening material*, J. Mech. Phys. Solids 16, 1-12, 1968.

-
- [44] Rybicki E.F., Kanninen M.F., *A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral*, Engineering Fracture Mechanics, 9, 931-938, 1977.
- [45] Sanders J., *On the Griffith-Irwin fracture theory*, ASME Trans 27 E, pp. 352-353, 1961.
- [46] Shih C.F., De Lorenzi H.G., E German M.D., *Crack Extension Modeling with Singular Quadratic Isoparametric Elements*, International Journal of Fracture, v.12, pp.647-651, 1976.
- [47] Smith A.S., Raju I.S., *Evaluation of stress intensity factors using general finite-element models*, Fatigue and Fracture mechanics, v. 29, ASTM STP 1321, 1998.
- [48] Tracey D. M., *Finite Elements for Determination of Crack Tip Elastic Stress Intensity Factors*, Engineering Fracture Mechanics, v. 3, pp. 255- 265, 1971.
- [49] Westergaard H., *Bearing pressures and cracks*, Journal of Applied Mechanics, vol. 6, 1939.
- [50] Yoon J., Cardoso R., Bray G., Barlat F., Scultz R., Bucci R., *Crack propagation toward friction stir weld*, Plasticity of conventional and emerging materials: Theory and applications, the 13th International Symposium on Plasticity and its Current Applications, pp.196-198, Alaska, USA, June 2-6, 2007.
- [51] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Papadopoulos P., Oñate E., *Plate bending elements with discrete constraints: New triangular elements*, Computers & Structures, vol. 35, 4, pp. 505-522, 1990.